Nom:

Activité 6: Factorisation

# Partie I (papier-crayon et calculatrice): Découverte de régularités parmi les facteurs

1. (a) Avant d’utiliser ta calculatrice, essaie de te rappeler la factorisation de chaque expression algébrique dans la colonne de gauche du tableau:

|  |  |
| --- | --- |
| Factorisation utilisant papier-crayon | Vérification avec la commande FACTOR  (montre le résultat affiché par ta calculatrice *s’il est différent de ce que tu as obtenu*) |
| *(a+b)(a-b)* | *(a+b)(a-b)* |
| *(a-b)(a2+ab+b2)* | *(a-b)(a2+ab+b2)* |
| *(x-1)(x+1)* | *(x-1)(x+1)* |
| *(x-1)(x2+x+1)* | *(x-1)(x2+x+1)* |

**Discussion en classe de la partie I, 1a**

1. (b) Effectue les opérations indiquées (avec papier-crayon)

 

 

2. (a) Sans faire aucune manipulation algébrique, prévois le résultat du produit suivant:  
 (Si tu n’y arrives pas, n’écris rien et passe à la question suivante.)

  *x4-1*

2. (b) D’abord en utilisant papier-crayon, puis avec ta calculatrice, vérifie le résultat que tu as prévu ci-dessus.

Papier-crayon

 *x4+x3+x2+x- x3-x2-x-1* = *x4-1*

Calculatrice

Expand ()

2. (c) Qu’est-ce que les trois expressions suivantes ont en commun? Et comment diffèrent-elles?

 ,  , et .

*(x-1)* est un facteur de chacune des trois expressions

L’autre facteur est une somme de puissances de *x* de plus en plus nombreuses: d’abord jusqu’à la puissance 1 ( *x+1*), puis deux (*x2+x+1*) et enfin trois (*x3+x2+x+1*).

2. (d) Comment expliques-tu que des produits de facteurs de plus en plus longs donnent un simple binome:

•  = *x*2-1

•  = *x*3-1

•  = *x*4-1

Ces produits produisent un binome à cause de la cancellation mutuelle de termes positifs et négatifs.

**Discussion en classe suite à la question 2d**

2. (e) En te basant sur les expressions obtenues jusqu’à présent, prédis la factorisation de l’expression .

*(x-1)(x4+x3+x2+x+1)*

2. (f) Explique pourquoi le produit (*x* –1) (*x*15 + *x*14 + *x*13 + … + *x*2 + *x* + *1*) donne le résultat *x*16–*1* ?

Le produit de *x* et de chaque terme du second facteur donne *x16 + x15 + …+x*.

Le produit de –1 et de chaque terme du second facteur donne -*x15- x14 - …-x-1*.

Ainsi, tous les termes négatifs sauf -1 s’annulent avec les termes positifs correspondants, pour donner finalement *x16-1*.

2. (g) Est-ce que ton explication (en (f), ci-dessus) reste valide pour l’égalité suivante:

(*x* –*1*) (*x*134 + *x*133 + *x*132 + … + *x*2 + *x* + *1*) = *x*135–*1* ?

Explique:

Oui, elle est valide aussi pour cette égalité. Le même phénomène d’annulation des termes “intérieurs” s’applique.

**Discussion en classe de la partie I, #1, 2**

## Partie II: Vers une généralisation (activité avec papier-crayon et avec calculatrice)

II (A) 1. Dans cette activité, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorisation avec papier-crayon | Résultat obtenu via la  commande FACTOR | Si, à la colonne de gauche, tu n’étais pas arrivé au résultat de la calculatrice (colonne du centre), poursuis tes calculs pour y arriver. |
| *(x-1)(x+1)* | *(x-1)(x+1)* |  |
| *(x-1)(x2+x+1)* | *(x-1)(x2+x+1)* |  |
| *(x2+1)(x2-1)*  = *(x2+1)(x+1)(x-1)* | *(x2+1)(x+1)(x-1)* | Si tu as factorisé  en *(x-1)(x3+x2+x+1),*  tu n’as peut-être pas réalisé que le second facteur pouvait encore être factorisé. |
| *(x-1)(x4+x3+x2+x+1)* | *(x-1)(x4+x3+x2+x+1)* |  |
| *(x3+1)(x3-1)*  = *(x+1)(x2-x+1)(x-1)(x2+x+1)* | *(x+1)(x2-x+1)(x-1)(x2+x+1)* | *x6-1* peut être factorisé via plusieurs approches: en appliquant l’identité de la différence de carrés; en appliquant l’identité de la différence de cubes; ou en appliquant une régularité découverte en faisant cette activité. Continue cependant de factoriser tant que c’est possible. |

II.A.2. Pour quels nombres *n* a-t-on que la factorisation de :

Quand *n* est 2, 3 ou 5.

1. comporte exactement deux facteurs?
2. comporte plus de deux facteurs?

Quand *n* est 4 ou 6.

1. comporte le facteur ?

Quand *n* est 4 ou 6.

Peux-tu prédire ce qui se passera quand *n* sera supérieur à 6 ?

Quel type de nombre sont 2, 3 et 5?

Quel type de nombre sont 4 et 6?

On pourrait faire plusieurs conjectures; mais celles-ci devraient être testées encore plus. Voir la partie II B.

**Discussion en classe de la partie II A**

**Part II suite (avec papier-crayon et avec calculatrice)**

II.(B) 1. Comme dans la partie A ci-dessus, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorisation avec papier-crayon | Résultat obtenu via la  commande FACTOR | Si, à la colonne de gauche, tu n’étais pas arrivé au résultat de la calculatrice, poursuis tes calculs pour y arriver. |
| *(x-1)(x6+x5+x4+x3+x2+1)* | *(x-1)(x6+x5+x4+x3+x2+1)* |  |
| *(x4+1)(x4-1)*  *= (x4+1)(x2-1)(x2+1)*  *= (x4+1)(x-1)(x+1)(x2+1)* | *(x-1)(x+1)(x2+1)(x4+1)* |  |
| *((x3)3-1)*  *= (x3-1)((x3)2+ x3+1)*  *= (x-1)(x2+x+1)(x6+ x3+1)* | *(x-1)(x2+x+1)(x6+ x3+1)* |  |
| *((x5)2-1)*  *= (x5-1)(x5+1)*  *= (x-1)(x4+x3+x2+x+1)(x+1)(x4-x3+x2-x+1)* | *(x-1)(x+1)(x4+x3+x2+x+1)(x4-x3+x2-x+1)* | Il n’était peut-être pas évident que *(x5+1)* était factorisable. |
| *(x-1)(x10+x9+ … +x2+x+1)* | *(x-1)(x10+x9+ … +x2+x+1)* |  |
| *((x4)3-1)*  *= (x4-1)((x4)2+x4+1)*  *= (x2-1)(x2+1)(x8+x4+1)*  *= (x-1)(x+1)(x2+1)(x8+x4+1)* | *(x-1)(x+1)(x2+1)(x2+x+1)(x2-x+1)(x4-x2+1)* | EXPAND *((x2+x+1)(x2-x+1))* donne  *(x4+x2+1)*  et  EXPAND *((x4+x2+1)(x4-x2+1))* donne  *(x8+x4+1)*  Donc, *(x8+x4+1)* se factorise en  *(x4+x2+1)(x4-x2+1)*,  qui peut lui-même se factoriser encore en  *(x2+x+1)(x2-x+1)(x4-x2+1)*. |
| *(x-1)(x12+x11+ … x+1)* | *(x-1)(x12+x11+ … x+1)* |  |

II.B.2. Sur la base des régularités que tu as observées dans le tableau II.(B) ci-dessus, complète (si nécessaire) ta prédiction de la partie A.   
C’est-à-dire, pour quels nombres *n* a-t-on que la factorisation de :

1. comporte exactement deux facteurs?
2. comporte plus de deux facteurs?

Quand *n* est 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

Quand *n* est 4, 6, 8, 9, 10 et 12.

1. comporte le facteur ?

Quand *n* est 4, 6, 8, 10 et 12.

Tes prédictions se sont-elles avérées justes?

Peux-tu maintenant prédire en général ce qui se passera quand *n* sera supérieur à 13 ?

Explique STP:

La factorisation complète de *xn-1* comporte exactement deux facteurs quand *n* est premier. [Ces deux facteurs sont *(x-1)* et *(xn-1+xn-2+ … +xn-(n-1)+1)* ]

Quand *n* est un nombre pair supérieur à 2, on obtient toujours plus de deux facteurs, et *(x+1)* est toujours l’un d’eux.

De plus, comme l’identité *x2-1 = (x+1)(x-1)* peut être appliquée à l’expression *xn-1* quand *n* est pair, on obtient aussi le facteur *(x-1)* dans ce cas.

Quand *n* est impair mais non premier, la factorisation de *xn-1* comportera plus de deux facteurs: *(x-1)* sera l’un d’eux, mais pas *(x+1)* .

**II.(C)** Réponds aux questions suivantes sans utiliser ta calculatrice:

1. Est-ce que 

* 1. comporte plus de deux facteurs?
  2. comporte le facteur ?

Explique STP:

Comme 2004 est pair et supérieur à deux, il y aura plus de deux facteurs et *(x+1)* sera l’un d’eux.

2. Est-ce que 

1. comporte plus de deux facteurs?

ii) comporte le facteur ?

Explique STP:

Comme 3003 est un nombre impair qui est un multiple de 3, il n’est pas premier.

La factorisation de *x3003-1* aura donc plus de deux facteurs, mais *(x+1)* ne sera pas l’un d’eux.

3. Est-ce que 

1. comporte plus de deux facteurs?

ii) comporte le facteur ?

Explique STP:

On doit vérifier si 853 est un nombre premier.

Si on tape FACTOR(853) à la calculatrice, le résultat obtenu est 853. Ceci veut dire que 853 est un nombre premier.

La factorisation complète de *x853-1* comportera donc exactement deux facteurs.

**Discussion en classe des parties II B et C**

**Partie III: Défi**

Explique pourquoi (*x* + 1) est facteur de  pour toutes les valeurs paires de *n* ≥ 2.

|  |
| --- |
| *xn* – 1 *= x*2*k* – 1(pour *n* pair)  = (*x*2)*k* – 1  = (*x*2 – 1)    = (*x* + 1)(*x* – 1)( … )  Une autre approche (via regroupements). Pour des valeurs paires de *n*, (*n* = 8, par exemple):  *x*8 – 1 = (*x* – 1)( *x* 7 + *x* 6 + *x* 5 + *x* 4 + *x* 3 + *x* 2 + *x* + 1)  = (*x* – 1)( *x* 6(*x* + 1) + *x* 4(*x* + 1) + *x* 2(*x* + 1) + 1(*x* + 1))  = (*x* – 1)(( *x* + 1)( *x* 6 + *x* 4 + *x* 2 + 1))  = (*x* – 1)( *x* + 1)( *x* 6 + *x* 4 + *x* 2 + 1)  = … |