Nom:

Activité 7: Factorisation et résolution d’équations comportant des expressions avec des radicaux (une activité d’intégration)

*Note à l’élève*: L’objectif principal de cette activité est de t’amener à voir et à utiliser la factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) comme outil pour résoudre des équations, particulièrement lorsqu’utilisé conjointement avec le “théorème du produit zéro”.

*Voici quelques objectifs secondaires:*

* + Comprendre que la factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) peut être appliquée non seulement aux constantes et aux variables mais aussi aux expressions algébriques composées, qui peuvent être considérées comme des objets sur lesquels on peut opérer.
  + Pouvoir ré-utiliser, lorsque nécessaire, les méthodes apprises pour résoudre les équations linéaires et quadratiques. Tu dois aussi pouvoir utiliser ces méthodes lorsque les équations à résoudre ne sont, en soi, ni linéaire ni quadratiques.
* Comprendre que simplifier une équation en divisant ses deux côtés par un facteur donné peut conduire à une perte de solutions. Lorsque de telles simplifications sont possibles, la stratégie consistant à isoler les termes d’un côté de l’équation et à utiliser le théorème du produit zéro permet généralement un meilleur contrôle dans la recherche systématique de solutions.
* Comprendre la nécessité de vérifier ses solutions dans le cas d’équations où certaines variables se retrouvent sous des radicaux.

1. Suppose qu’on te demande de résoudre cette équation:

 (\*)

a) Comment procèderais-tu face à un tel “monstre”? (N’essaie pas de résoudre l’équation; décris seulement ton approche générale.)

|  |
| --- |
| Une approche possible est de considérer  comme objet de manipulations algébriques, objet qu’on peut isoler dans l’équation donnée.  Une stratégie de résolution recommandée serait de regrouper les termes contenant  comme facteur, et d’utiliser la factorisation et le théorème du produit nul pour résoudre l’équation équivalente ainsi obtenue.  Une autre stratégie de résolution pourrait être de diviser les deux côtés de l’équation par , avec la contrainte que *x* > 4 (pourquoi?). Ceci produit une équation (équivalente?) qui est linéaire en x et donc facilement résoluble. |

1.b) En utilisant papier-crayon, vois d’abord si tu peux résoudre l’équation suivante, qui est un peu analogue au “monstre” ci-dessus:

*(y-2)3 –10(y-2) = y(y-2)* (\*\*)

*Indice*: La factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) pourrait être utile ici.

|  |
| --- |
| Si on suit l’approche générale esquissée en 1a:  1. On soustrait *y(y-2)* des deux côtés de (\*\*) pour produire l’équation équivalente  *(y-2)3 –10(y-2)-y(y-2) = 0*.  2. On met *(y-2)* en évidence pour produire une seconde équation équivalente  *(y-2)[(y-2)2 –10-y] = 0*.  3. On simplifie cette troisième équation en utilisant l’algèbre et la factorisation pour produire la suite d’équations équivalentes suivante:  *⇔ (y-2)[(y-2)2 –10-y] = 0*  *⇔ (y-2)[y2-4y+4 –10-y] = 0*  *⇔ (y-2)[y2-5y–6] = 0*  *⇔ (y-2)(y+1)(y-6) = 0*  4. On invoque le théorème du produit nul pour résoudre cette dernière équation équivalente:  *(y-2)(y+1)(y-6) = 0 ⇔ y-2 = 0 ou y+1 = 0 ou y-6 = 0*    *⇔ y = 2 ou y = -1 ou y = 6* |

1.c) Compare ta solution de l’équation de l’équation (\*\*) à celle obtenue en utilisant la commande SOLVE de ta calculatrice. Si les solutions obtenues sont différentes, vérifie ton travail algébrique papier-crayon. Si la calculatrice a produit une ou plusieurs solutions additionnelles, détermine quelles étapes de tes manipulations algébriques ont causé cette perte de solution(s). STP montre tout ton travail dans l’espace ci-dessous.

|  |
| --- |
| La commande “SOLVE(*(y-2)3 –10(y-2) = y(y-2), y)*” produit le résultat  “*y = 2 ou y = -1 ou y = 6*”.  La calculatrice a donc obtenu exactement les mêmes solutions que celles obtenues ci-dessus avec des manipulations algébriques papier-crayon. |

#### Discussion en classe des questions 1a, b, & c

2. a) En te basant sur les stratégies employées pour résoudre l’équation précédente (\*\*), trouve les solutions de l’équation suivante en utilisant papier-crayon:

 (\*\*\*).

Montre tout ton travail dans l’espace ci-dessous.

|  |
| --- |
| Considérons  comme un objet dans nos manipulations algébriques:  1. On soustrait *(3u-7)* des deux côtés de (\*\*\*) pour obtenir l’équation équivalente    *5()3 + 4-(3u-7) = 0.*  2. On met  en évidence dans chaque terme pour produire une autre équation équivalente  [*5()2* + *4-(3u-7)*] *= 0.*  3. À l’aide de simplifications algébriques, on obtient les équations équivalentes  (*5u* + *4-3u + 7) = 0 ⇔* *(2u +11) = 0.*  4. On utilise le théorème du produit nul pour résoudre l’équation équivalente finale:  *(2u +11) = 0⇔  = 0 ou (2u +11) = 0*  *⇔ u = 0 ou u = -11/2*  5. Puisque  ne correspond pas à un nombre réel quand *u* < 0, alors *u = -11/2* est une valeur non admissible. L’ensemble solution de (\*\*\*) est donc {0}. |

2. b) Substitue les valeurs que tu as obtenues comme solutions de l’équation (\*\*\*) en utilisant l’opérateur de substitution (“**|**”) de ta calculatrice. Qu’est-ce que la calculatrice affiche comme résultat? Y a-t-il des solutions que tu éliminerais? Explique pourquoi.

|  |
| --- |
| On entre l’expression “ **|** *u* = {0, -11/2}” suivie de la touche ENTER, et la calculatrice affiche comme résultat “{true, false}”.    La calculatrice confirme donc que *u = -11/2* n’est pas une solution admissible (puisque cette valeur ne satisfait pas l’équation sur les nombres réels). On doit donc éliminer  *u = -11/2*, tel qu’expliqué ci-dessus. |

##### Discussion en classe de la question 2

3. De retour avec papier-crayon, essaie maintenant de résoudre l’équation originale (\*):

.

Détermine d’abord la condition pour que des solutions soient admissibles, étant donné les radicaux. Puis compare ta ou tes solution(s) avec celle(s) produite(s) par ta calculatrice, et discute de la validité de chaque valeur affichée.

Montre tout ton travail dans l’espace ci-dessous.

|  |
| --- |
| Puisque  définit un nombre réel seulement quand *x* ≥ 4, alors seules les solutions satisfaisant cette condition seront admissibles.  On utilise une stratégie de résolution analogue à celle utilisée dan sla Partie 2a:  ⇔[5()2 + 11-(2*x* + 1)] = 0  ⇔ [5(*x*-4)+ 11-2*x-*1)] = 0  ⇔ [5(*x*-4)+ 11-2*x-*1)] = 0  ⇔ (3*x-*10) = 0  ⇔  = 0 ou (3*x-*10) = 0  ⇔ *x* = 4 ou *x* = 10/3  Puisque *x* = 10/3 < 12/3 = 4, cette solution est inadmissible. {4} est donc l’ensemble solution de l’équation donnée.  La commande “solve” de la calculatrice produit les mêmes solutions, mais une vérification en utilisant l’opérateur de substitution (“**|**”) de la calculatrice indique que *x* = 10/3 est bien inadmissible sur les nombres réels. |

##### Discussion en classe de la question 3

4. Problème-défi

a) Résoud l’équation suivante en utilisant papier-crayon:

.

En suivant l’approche des derniers problèmes, on note tout d’abord que seules les solutions satisfaisant la condition 2*x*-1 ≥ 0 [ou de façon équivalente *x* ≥ 1/2] sont admissibles.

On peut résoudre l’équation en regroupant et factorisant, considérant  comme un objet dans nos manipulations algébriques:



⇔ [()4 + 3()2 + 5-(8*x*+7)] = 0

⇔ [(()2)2 + 3(2*x*-1) + 5-8*x*-7)] = 0

⇔ [(2*x*-1)2 + 6*x*-3+ 5-8*x*-7)] = 0

⇔ [4*x*2-4*x* + 1-2*x*-5] = 0

⇔ (4*x*2-6*x*-4) = 0

⇔ 2(2*x*2-3*x*-2) = 0

⇔ 2(2*x* + 1)(*x*-2) = 0

⇔  = 0 ou 2*x* + 1 = 0 ou *x*-2 = 0

⇔ *x* = 1/2 ou *x* = -1/2 ou *x* = 2

La valeur *x* = -1/2 est inadmissible puisqu’elle ne vérifie pas la condition identifiée précédemment.

b) Quelles sont les solutions de cette équation qui sont affichées par la calculatrice?

Discute de la validité de ces solutions.

En utilisant la commande “solve”, la calculatrice affiche les trois solutions que nous venons d’identifier. Seule la valeur *x* = -1/2 est inadmissible, comme constaté précédemment. Cependant, si on essaie de le vérifier en utilisant l’opérateur de substitution pour ces trois valeurs dans l’équation originale, la calculatrice affiche le résultat {true, true, true} au lieu de la réponse correcte {true, false, true}.