

EL PAPEL DE CAS EN LA PROMOCIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y EN EL SURGIMIENTO DE TEORÍA

Cesar Martínez¹, José Guzmán¹, Carolyn Kieran²

¹Cinvestav-IPN (México), ²UQÀM (Canadá)

cmartinez@cinvestav.mx, jguzman@cinvestav.mx, kieran.carolyn@uqam.ca

Nivel: Bachillerato, innovación educativa

Palabras clave: Expresiones racionales, CAS, Aproximación instrumental

Resumen:

En el presente artículo discutimos algunos ejemplos de resultados obtenidos en el proyecto de investigación doctoral en torno al desarrollo del conocimiento algebraico de estudiantes de bachillerato en un ambiente CAS. De acuerdo con dichos resultados, se observa el mismo tipo de comportamiento: un conflicto cognitivo; a partir del cual el uso de CAS promueve reflexiones técnico-teóricas en torno a la simplificación de expresiones racionales.

Introducción

Las investigaciones en torno al estudio del impacto del uso de nuevas tecnologías en el aprendizaje del álgebra han evolucionado desde diferentes perspectivas (Ferrera, Pratt & Robutti, 2006; Kieran & Yerushalmy, 2004). En particular, sobre el uso de CAS, una de ellas es la *aproximación instrumental* (Artigue, 2002; Drijvers & Trouche, 2008; Lagrange, 2003, 2005) con dos enfoques: la ergonómica [ergonomía cognitiva] y la antropológica. En el primero, el énfasis es estudiar los esquemas desarrollados por los alumnos en el proceso de la génesis instrumental; en el segundo, el objetivo es estudiar las técnicas y la teoría desarrolladas por los estudiantes al hacer uso de tecnología.

Tomando en cuenta esta perspectiva teórica, se ha puesto en evidencia el potencial de CAS para promover el razonamiento algebraico de los alumnos. Por ejemplo, Kieran y Drijvers (2006) muestran que un ambiente CAS promueve relaciones dialécticas entre las diferentes técnicas y el surgimiento de teoría acerca de la factorización de expresiones de la forma $x^n - 1$. En línea con esta misma perspectiva teórica, Guzmán, Kieran y Martínez (2011) han estudiado el tipo de tarea “Simplificar una expresión racional”, actividad algebraica en la que es reconocido que los alumnos muestran dificultades en su manipulación simbólica (Matz, 1980, 1982).

Guzmán, Kieran y Martínez (2011) han planteado que el ambiente CAS promueve en los alumnos reflexiones teóricas, por ejemplo, para explicar los resultados obtenidos en este ambiente tecnológico en términos de la división de polinomios y del residuo de dicha división. En el presente artículo, el objetivo es discutir los resultados del estudio piloto (Guzmán, Kieran & Martínez, 2011) con los obtenidos en la segunda fase de la investigación (toma final de datos), apoyados en la aproximación instrumental en su enfoque antropológico.

Marco conceptual

Una perspectiva teórica reconocida por la comunidad (e.g., Drijvers, Kieran & Mariotti, 2010, Haspekian, 2005, Hitt & Kieran, 2009 y Leung, Chan & Lopez-Real, 2006) para el análisis e interpretación del aprendizaje en medios tecnológicos es la *aproximación instrumental* del uso de herramientas tecnológicas (Artigue, 2002; Drijvers & Trouche,

2008; Lagrange, 2003, 2005), en particular, su enfoque antropológico conocido como Tarea-Técnica-Teoría. En este enfoque, el énfasis es el desarrollo de Técnicas y de Teoría en el estudiante (en torno a cierta Tarea planteada) cuando éste hace uso de tecnología para resolverla.

De acuerdo con Artigue (2002) la aproximación instrumental del uso de herramientas tecnológicas tiene dos influencias: una es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), la otra es la ergonomía cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995). De esta manera, pueden distinguirse, bajo esta perspectiva teórica, dos direcciones: una en línea con la ergonomía cognitiva; en donde el objetivo es estudiar los esquemas que el estudiante desarrolla en el proceso de la génesis instrumental, y un aspecto importante es distinguir un artefacto de un instrumento. En la segunda, el énfasis es estudiar la Técnica y Teoría que el alumno desarrolla en torno a cierto tipo de Tarea cuando éste hace uso de tecnología para resolverla. En el presente trabajo, seguimos la segunda dirección.

Artigue (2002) y sus colegas, a partir de la TAD, colapsan los cuatro elementos que constituyen una praxeología (Chevallard, 1999) en tres: Tarea, Técnica y Teoría. De esta manera, en la aproximación instrumental, el término *Tarea* se refiere al problema a resolver; ésta es expresada, generalmente, mediante un verbo (e.g., dividir, multiplicar, simplificar, etc). La *Técnica* es un método o una manera de resolver la *Tarea*, su naturaleza no necesariamente es de naturaleza algorítmica; es una combinación compleja de razonamiento y trabajo rutinario que tiene tanto valor pragmático como epistémico (Artigue, 2002, p. 48). Las *Técnicas* permiten distinguir y reorganizar las *Tareas*; por ejemplo, pueden existir diferentes *Técnicas* para resolver una misma *Tarea* (Lagrange, 2005, p. 116) con lo cual puede ser discutido el alcance de cada una, por ejemplo, al analizar los resultados obtenidos con éstas.

Es decir, las *Técnicas* funcionan como un objeto para la reflexión conceptual cuando son comparadas con otras y cuando su consistencia es discutida (Lagrange, 2003, p. 271). La *Teoría* es el discurso [matemático] que justifica o explica la *Técnica*. Esta función epistémica de la *Técnica* ha sido el foco de atención en varias investigaciones (e.g., Kieran & Drijvers, 2006, Hiit & Kieran 2009, entre otras) respecto del incremento en términos de la *Teoría* y la *Técnica* que los estudiantes desarrollan cuando hacen uso de artefactos tecnológicos, particularmente aquellas que toman en cuenta el uso de CAS como una nueva *Técnica* que permite resolver cierta *Tarea* planteada.

Metodología

La toma de datos, de la investigación, consistió en dos fases: el estudio piloto y la toma de datos final. El objetivo de la primera fue obtener evidencia de la viabilidad del proyecto de investigación y para efectuar las modificaciones pertinentes en los instrumentos de acopio de datos. La segunda, se llevó a cabo para contar con los datos que provean evidencias acerca de las hipótesis planteadas en la investigación. El acopio de datos, en ambas fases, se llevó a cabo mediante la modalidad de entrevista, con tareas (actividades) diseñadas con un enfoque técnico-teórico. Es decir, en términos del marco conceptual adoptado para el análisis de los datos de esta investigación, las actividades fueron diseñadas de manera tal que para la Tarea dada (simplificar una expresión racional) involucraran preguntas técnicas y teóricas.

La población participante fueron alumnos de bachillerato (15 y 16 años de edad) de una escuela pública, en dos ciclos escolares distintos. Es decir, la toma de datos se llevó a cabo con dos poblaciones de las mismas características, lo cual nos permitió comparar los resultados obtenidos en las dos fases de la toma de datos. Para el desarrollo de las entrevistas, los alumnos fueron acomodados en parejas (formadas por ellos mismos); recibieron una breve instrucción sobre el uso de la calculadora TI voyage 200 para que pudieran resolver las actividades diseñadas. Ninguno de los participantes había utilizado antes este tipo de tecnología en sus clases de matemáticas o fuera de ellas.

El análisis de los datos es de naturaleza cualitativa; es decir, en donde una actividad central es explicar las formas como las personas en acomodos o situaciones particulares comprenden, dan razones de, actúan y manejan situaciones (Miles & Huberman, 1994). Los procesos centrales de toda investigación son: el acopio, representación, manipulación e interpretación de datos; estos procesos deben tomar en cuenta el referente teórico elegido. Para darle un valor de fiabilidad a cada uno de los procesos y por ende a los resultados que de ellos se obtengan, se debe cumplir con los siguientes criterios: poder descriptivo y explicativo; predicción; rigor y especificidad; replicabilidad y triangulación (Schoenfeld, 2007, p. 82). En este artículo discutimos resultados de ambas fases del estudio; en particular, interesa discutir los procesos de la predicción de los resultados y la replicabilidad y, de esta manera, analizar si la toma final de datos arroja resultados parecidos que los obtenidos en el estudio piloto.

Análisis de datos y discusión de resultados

Los datos fueron analizados con el enfoque de la Tarea-Técnica-Teoría; estos muestran que en las dos poblaciones, el mismo tipo de reflexiones técnico-teóricas emergen en los alumnos para explicar los resultados dados por CAS y para decidir cuándo una expresión racional es no reducible. En un reporte previo (Guzmán, Kieran & Martínez, 2011) hemos planteado que cuando los estudiantes sólo poseen la técnica de cancelación para simplificar una expresión racional, cometen errores conocidos y caracterizados en la literatura como errores de extrapolación lineal y el papel epistémico del uso de CAS en torno a ello.

Es decir, cuando su Técnica de papel-y-lápiz, consistente en cancelar elementos (literales o coeficientes que involucra la expresión racional), que se repiten en el numerador y denominador sin importar si estos son o no factores comunes, en algunas expresiones reducibles (particularmente aquellas de la forma *binomio/monomio*), dicha Técnica funciona. Sin embargo, para otras expresiones reducibles y no reducibles (de la forma *binomio/binomio*) esta Técnica (cancelación directa) no es adecuada. La siguiente Figura 1 muestra el trabajo de uno de los equipos del estudio piloto (Equipo A, en adelante) donde se observa lo antes mencionado.

Ia) Simplifica, usando papel y lápiz, las siguientes expresiones. Muestra todo tu trabajo. Completa la tabla comenzando con la primera fila.

Expresión	Explica tu procedimiento de simplificación
$\frac{ab}{b} + 2b$ $= a + 2b$	Al dividir ab entre b , se quita la b porque resultaría b^0 y ya no se escribe.
$\frac{x(3+x)}{x}$ $= \frac{3x+x^2}{x}$ $3+x^2$	Primero multiplicamos lo que está antes del paréntesis por lo de adentro del mismo y después simplificamos x .
$\frac{4x+4y}{x+y}$ $= 4+4$ $= 8$	Al dividir letras iguales los exponentes se restan y como resultan elevadas las variables a la cero ya no se escriben.
$\frac{3x+4y}{x+y}$ $= 3+4$ $= 7$	//

Figura 1. Trabajo con papel-y-lápiz del Equipo A del estudio piloto.

Cuando los alumnos utilizan CAS (Figura 2), como segunda Técnica para llevar a cabo la Tarea planteada, ésta promueve en ellos reflexiones Técnicas y Teóricas. En las expresiones de la forma *binomio/binomio* se observa claramente el papel epistémico de la Técnica CAS. Lo anterior puede observarse en la Figura 3. En ésta los estudiantes manifiestan procedimientos alternativos de papel-y-lápiz para explicar los resultados que se obtienen con la Técnica CAS. Es decir, los alumnos evolucionan de la Técnica de cancelación a la división de polinomios; en donde si en esta última el residuo es cero, entonces el cociente que se obtiene es la expresión simplificada. En cambio, si el residuo es diferente de cero, concluyen que la expresión es irreducible (para mayores detalles ver Guzmán, Kieran & Martínez, 2011).

Ib) Verifica tus respuestas de Ia), para ello, utiliza la calculadora (usa la tecla *enter*). Escribe los resultados dados por la calculadora en la siguiente tabla.

Introduce en la calculadora	Respuesta dada por la calculadora	Introduce en la calculadora	Respuesta dada por la calculadora
$\frac{ab}{b} + 2b$	$a + 2b$	$\frac{x(3+x)}{x}$	$x + 3$
$\frac{2(a+b)}{2}$	$a + b$	$\frac{4x+4y}{x+y}$	4
$\frac{2x+xy}{x}$	$y + 2$	$\frac{3x+4y}{x+y}$	$\frac{3x+4y}{x+y}$

Figura 2. Trabajo con CAS del Equipo A.

le) Si tus respuestas de la) no coinciden con los dados por la calculadora en lb), en uno o en más casos, conjetura la razón del error y cómo se podría evitar, escríbelo en el cuadro de abajo.

No dividimos bien, y se podría evitar realizando la división gráficamente (con la casita).

$$x+y \overline{) \begin{array}{r} 4x+4y \\ -4x-4y \\ \hline 0 \end{array}}$$

$R=4$

$$x+y \overline{) \begin{array}{r} 3x+4y \\ -3x-3y \\ \hline y \end{array}}$$

Figura 3. Nueva Técnica de papel-y-lápiz del Equipo A.

En el estudio final, uno de los Equipos (Equipo B, en adelante) manifiesta el mismo tipo de Técnica de papel-y-lápiz que el Equipo A del piloto, además de la división de polinomios, antes de utilizar la Técnica CAS. De esta manera, el trabajo de este Equipo permite comparar el trabajo de ambos Equipos una vez que utilizan la Técnica CAS. De acuerdo con lo planteado en la sección metodológica de este documento, se espera que la evolución del razonamiento algebraico de los estudiantes sea parecida.

Las siguientes figuras 4 y 5 corresponden al trabajo del Equipo B. La primera de éstas muestra el trabajo con papel-y-lápiz; la segunda el trabajo con CAS. De acuerdo con el registro escrito del Equipo B, en su trabajo con papel-y-lápiz, utilizan dos técnicas: cancelar y división de polinomios. De esta manera, una diferencia entre los Equipos del estudio piloto y en la toma final de datos es el número y tipo de Técnicas iniciales de papel-y-lápiz que los alumnos utilizan para simplificar las expresiones planteadas.

$\frac{4x+4y}{x+y} = \frac{4x}{x} + \frac{4y}{y} = 4 + 4 = 8$	<p>Se realiza la división $\frac{4x+4y}{x+y}$ se elimina 'x' y se elimina 4y</p>
$\frac{3x+4y}{x+y} = \frac{3x}{x} + \frac{4y}{y} = 3 + 4 = 7$	<p>al realizar la operación $\frac{4x+4y}{x+y}$ se eliminan las 'x' con las 'x' y las 'y' con las 'y' = 3+4=7</p>

Figura 4. Trabajo con papel-y-lápiz del Equipo B.

Id) Verifica tus respuestas de Ia), para ello, utiliza la calculadora (usa la tecla *enter*). Escribe los resultados dados por la calculadora en la segunda columna de la siguiente tabla. Completa la tabla comenzado por la primera fila; de izquierda a derecha.

Introduce en la calculadora	Respuesta dada por la calculadora	Describe, cómo harías para obtener el mismo resultado que el dado por la calculadora
$\frac{x(3+x)}{x}$	$x+3$	Se realiza la división y nos da como resultado $x+3$
$\frac{4x+4y}{x+y}$	4	Se realiza la operación correspondiente a una división.
$\frac{3x+4y}{x+y}$	$\frac{3x+4y}{x+y}$	Al hacer la división y obtener un residuo nos daríamos cuenta que es una expresión ya simplificada.

Figura 5. Trabajo con CAS y explicación de resultados del Equipo B.

De acuerdo con las figuras 4 y 5, la Técnica CAS le sugiere al Equipo B que su Técnica de división es la correcta para simplificar las expresiones racionales. Es decir, por un lado, la Técnica CAS les confirma su Técnica de división de polinomios (sin que dejen de utilizar la cancelación directa; especialmente en las expresiones reducibles de la forma *binomio/monomio*); por otro, provoca una reflexión teórica sustentada en el residuo del algoritmo de la división (ver última fila de la Figura 5) respecto de las expresiones irreducibles de la forma *binomio/binomio*. Así, esto último (la reflexión teórica) es del mismo tipo que surgió en el Equipo A del estudio piloto al contrastar su Técnica de papel-y-lápiz con la Técnica CAS.

De esta manera, ~~mientras que~~ en el Equipo A, el uso de CAS provocó que relacionaran los resultados de esta Técnica con la división de polinomios y que explicaran las expresiones irreducibles en función del residuo de dicha división, en el Equipo B ocurre un fenómeno parecido en cuanto a las expresiones irreducibles. En este sentido, estos resultados deben esperarse de acuerdo con los criterios de predicción y replicabilidad de una investigación de naturaleza cualitativa, ya que los dos Equipos A y B muestran un trabajo con papel-y-lápiz similar.

Conclusiones

En este reporte de investigación hemos mostrado, por un lado, el papel epistémico de la Técnica CAS. En el Equipo A del estudio piloto, este papel epistémico se observa tanto en la técnica como en la Teoría: provoca que los estudiantes piensen en otra técnica para simplificar las expresiones racionales planteadas y que les expliquen los resultados dados por CAS; sus reflexiones son también de carácter teórico al sustentar en el residuo de la división, cuándo una expresión es o no reducible. En el Equipo B del estudio final, el papel epistémico se observa respecto de la reflexión de carácter teórico que emerge en los alumnos sobre el significado que le atribuyen al residuo de la división de polinomios.

Por otro, el hecho de que CAS haya provocado, tanto en el estudio piloto como en el final, el mismo tipo de reflexiones teóricas, nos permite argumentar la validez de estos resultados de nuestra investigación, con base en los criterios de replicabilidad y predicción. Así, con lo

reportado en este documento, en éste se ofrecen evidencias acerca del papel positivo del uso de CAS en la promoción del razonamiento algebraico, particularmente acerca de producción teórica en los alumnos en torno a la simplificación de expresiones racionales.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M-A. (con Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung A. & Meagher, M.) (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles & J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain*. NY: Springer.
- Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 cases, and perspectives* (pp. 363-391). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Ferrera, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 237-274). The Netherlands: Sense Publishers.
- Guzmán, J., Kieran, C. & Martínez, C. (2011). Simplification of Rational Algebraic Expressions in a CAS Environment: A Technical-Theoretical Approach. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-35)*, Vol. 2, pp. 481-488. Ankara, Turquía: PME.
- Haspekian, M. (2005). An “Instrumental Approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of Spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.
- Hitt, F. & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task–technique–theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14, 121-152.
- Kieran, C. & Drijvers P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 205-263.
- Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 99-152). New York: Kluwer Academic.

- Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.
- Leung, A., Chan, Y. & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. En C. Hoyles, J-B. Lagrange, L.H. Son & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, pp. 346-353. Hanoi, Vietnam: ICMI.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 3 (1), 93-166.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25-50). London: Academic Press.
- Miles, M. & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*. USA: Sage Publications.
- Schoenfeld, A. (2007). Method. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on the mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 69-110). Charlotte NC: Information Age Publishing Inc.
- Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-103.