La discusión en el salón de clases en un ambiente tecnológico-algebraico[1]

José Guzmán
Centro de Investigación y
de Estudios Avanzados del IPN
jguzman@cinvestav.mx

Carolyn Kieran
Université du Québec à Montréal
Département de Mathématiques
kieran.carolyn@uqam.ca

Resumen. Este artículo describe la práctica de un profesor de matemáticas de secundaria, sobre la orquestación de la discusión en clases. Un grupo de alumnos de décimo grado (15 años de edad) fue observado durante cinco meses en su curso de álgebra. De todas las tareas abordadas por el grupo, este artículo se refiere a aquellas que tratan el concepto de equivalencia de expresiones algebraicas; algunas de ellas tienen restricciones. La tecnología [Computer Algebra Systems (CAS)] fue fundamental en esta investigación. Se analiza la discusión implementada por el profesor con todo el grupo, la naturaleza de las preguntas planteadas, por él y por sus estudiantes, así como la influencia de la tecnología en sus preguntas y respuestas. Varios ejemplos ilustran cómo el profesor facilita la discusión, en un ambiente donde las matemáticas son el punto central de esa discusión. Estos ejemplos muestran cómo la motivación de los estudiantes les ayuda a elaborar, clarificar y justificar sus ideas matemáticas.

Palabras clave: práctica del profesor, discusión en clase, tecnología, álgebra.

1. Introducción a la Problemática y Marco Conceptual

Desde hace algunos años, la investigación sobre la práctica de los profesores de matemáticas en el salón de clases, ha sido tema de discusión importante en educación matemática (Boaler, 2003; Robert & Rogalski, 2005; Sherin, 2002; Trouche, 2004). En la literatura actual, en este dominio de conocimiento, varios investigadores discuten el papel que juega el discurso del profesor en el salón de clases, para que emerjan aprendizajes en los estudiantes. Por ejemplo, Robert y Rogalski (2005) analizan desde los puntos de vista didáctico y psicológico cómo surge el aprendizaje de los estudiantes en un ambiente de discusión en clase.

Robert y Rogalski caracterizan la naturaleza de las respuestas del profesor, a partir de preguntas que él plantea a sus estudiantes, en un contexto de ejercicios matemáticos. En esta temática, otros investigadores enfocan su trabajo en cómo facilitar la discusión en el salón de clases. Por ejemplo, Sherin (2002) describe la práctica de un profesor de matemáticas de

[1] In E. Mancera Martínez y C. A. Pérez Gamboa (Eds.), *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – Historia y Prospectiva de la Educación Matemática* (CIAEM), Querétaro, México, 2007.

octavo grado, quien centra su discurso con sus alumnos en los *procesos* matemáticos subyacentes en la tarea, y facilita la discusión relacionada con el significado del *contenido* matemático. Para Sherin es importante la forma de preguntar del profesor, así como sus comentarios respecto de las respuestas de sus alumnos.

El estudio de Sherin reporta la dificultad del profesor, cuando trata de mantener un equilibrio entre *procesos* y *contenido*, en la discusión en el salón de clases. Otros estudios con un componente tecnológico (e.g., Drijvers & Trouche, 2007) discuten la articulación del aprendizaje de los estudiantes en ambientes tecnológicos. El trabajo de Drijvers y Trouche muestra la naturaleza de las orquestaciones de la discusión matemática en el salón de clases, cuando las herramientas tecnológicas son parte de ese ambiente. Investigaciones recientes (e.g., Kieran & Drijvers, 2006) ponen de manifiesto la influencia de resultados no esperados, producidos por el *output* de las herramientas tecnológicas, en la naturaleza de las ideas matemáticas discutidas en clase.

La revisión teórica precedente nos condujo a las siguientes preguntas de investigación:

i) *¿Cómo conduce el profesor la discusión en clase, en ambientes tecnológicos, usando tareas que motivan el aprendizaje de un contenido matemático especifico?*

ii) *¿Cuál es la naturaleza de las preguntas planteadas por el profesor y por sus estudiantes?*

iii) *¿Cómo se refleja la presencia de la tecnología en sus preguntas y respuestas?*

2. El Estudio, la Metodología y las Tareas

Llevamos a cabo un estudio con estudiantes de décimo grado (15 años de edad). El objetivo principal fue investigar el desarrollo de su aprendizaje conceptual y técnico, en un ambiente tecnológico [Computer Algebra Systems (CAS)] con diez tareas diseñadas por el equipo de investigación, en las que se contempla la discusión en el salón de clases. En este artículo se reporta el trabajo de uno de los grupos participantes. El grupo es de una escuela privada de Montreal, cuya lengua materna es el Inglés. La investigación tuvo lugar en su clase ordinaria durante cinco meses. En el salón de clases, fueron colocadas dos video-cámaras. Uno o dos investigadores tomaba notas de campo durante cada una de las clases. El profesor era entrevistado con frecuencia, así como alguno de sus estudiantes. Todas las actividades, tanto las llevadas a cabo en el salón de clases, como las entrevistas fueron video-grabadas y transcritas; estas transcripciones son la fuente principal de datos de este reporte. El profesor de este grupo, había enseñado álgebra durante cinco años. En sus clases ordinarias de matemáticas, este profesor motivaba a sus estudiantes, para que participaran, cada vez que resolvían un problema, y les daba tiempo para que pensaran y reflexionaran sus respuestas.

En este artículo se discute el concepto de equivalencia de expresiones algebraicas. Se pone énfasis en las restricciones (valores posibles de x) de expresiones algebraicas para que sean equivalentes. Diseñamos e implementamos tres tareas sobre equivalencia; las cuales contienen tres o cuatro lecciones cada una. Al inicio de la secuencia de enseñanza, fueron utilizadas sustituciones numéricas en expresiones algebraicas, usando CAS. Una de las consignas principales aquí fue la sustitución numérica (Figura 1). Los resultados obtenidos por los estudiantes, al hacer esas sustituciones, les *sugerían* que algunas parejas de expresiones algebraicas eran *iguales*, pues daban el mismo resultado. La actividad continuaba con preguntas de reflexión, poniendo énfasis en la observación de los resultados obtenidos en la Tarea (Figura 1), y en lo que sucedía si asignaban otros valores a x.

For x =	1/3	-5		
Expression	Result	Result	Result	Result
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{x+2}$				

Figura 1. Tarea de Sustitución Numérica

La Tarea y la técnica de sustitución numérica, usando CAS condujo a la siguiente definición de equivalencia de expresiones algebraicas:

> Dos expresiones algebraicas son equivalentes en los números reales o en uno de sus subconjuntos, si para cualquier número x de la intersección de sus dominios, cada una de las expresiones da el mismo resultado en ese conjunto de valores.

El énfasis puesto en el conjunto de números posibles de x fue hecho deliberadamente por los diseñadores de la Tarea, pues los estudiantes debían considerar las restricciones de x que implican la equivalencia de expresiones. La expresión 5 de la Figura 1 fue el primer ejemplo de esto. En la Tarea de la Ecuación (Figura 2) se hace explícito el propósito de discutir las restricciones de expresiones algebraicas equivalentes, y la forma en la que CAS influye en la discusión.

Enter directly into your calculator's entry line the equation formed by Expressions 3 and 5:
$$(3x–1)(x^2–x–2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$
1. What does the calculator display as a result?
2. How do you interpret this result?
3. Use your calculator's "with operator" (|) to replace x by –2 in the above equation. Interpret the result displayed by the calculator.

Figura 2. Tarea de la Ecuación

Las dos expresiones algebraicas que forman los lados izquierdo y derecho de la ecuación (Figura 2) son equivalentes en el conjunto de los números reales, excluyendo –2. CAS muestra *true* en la pantalla al introducir la igualdad (pregunta 1), pero no da la restricción. La segunda pregunta de esta tarea cuestiona a los estudiantes para que reflexionen en el resultado mostrado por CAS. La tercera pregunta provoca la reflexión del estudiante, sobre el impacto que tienen las restricciones de expresiones algebraicas equivalentes, escritas como ecuación.

3. Análisis de Datos

Las dos expresiones algebraicas que forman la base de la discusión son la 3 y la 5 (Figura 1):

Expr 3: $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$ Expr 5: $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$

Después de completar la primera parte de la Tarea (Figura 1, Pregunta 1A), los estudiantes debían discutir las dos preguntas de reflexión 1B y 1C.

> Pregunta 1B: *Compara los resultados obtenidos de las expresiones dadas en la tabla precedente. Escribe en el rectángulo de abajo lo observado.*
> Pregunta 1C: *Tomando como base tus observaciones (en 1A), ¿qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si extiendes la tabla, de modo que incluyas más valores de x?*

La siguiente discusión se dio después de que los estudiantes respondieron las dos preguntas de reflexión.

3.1. *Iniciación de la discusión sobre el concepto de equivalencia*

El profesor inicia la discusión, planteando una pregunta abierta a todo el grupo, sobre lo observado en la Tarea de Sustitución Numérica (L43):

L43. Teacher: So, 1B, what results did you obtain? Anyone.
L44. Student 13: Expressions 3 and 5 end up having the same answers. [Teacher writes on the board: #3 = #5]
L45. Teacher: For all of the ones you put in there they ended up having the same answer?
L46. Student 13: And 1 and 4 also. [Teacher writes on the board: #1 = #4] …
L49. Student 14: The expressions are the same thing as the other ones, just in a different form.

En este extracto (L49) un estudiante introduce las palabras *different form*, las cuales permiten al profesor plantear otras preguntas.

L50. Teacher: So you're saying that these pairs of expressions are exactly the same.
L51. Student 14: Equivalent representations of the same thing.
L52. Teacher: Equivalent representations? Did anybody not get that? So what are we saying? What did you mean by what you said, student 14?
L53. Student 14: They represent the same thing, they give you…like if you substitute in x, like it will come out to the same answer.
L54. Teacher: Why is that the case?
L55. Student 14: Because they're just a different form, like they're an unfactored form of a, uh, multiplication of two binomials, or something like that.
L56. Teacher: Does everyone follow what he's saying?

El profesor solicita al estudiante que precise su respuesta (L54). De nuevo, él plantea una pregunta a todo el grupo para saber si comprenden lo dicho por el estudiante 14 (L56). Algunos momentos más tarde, el profesor pasa a la pregunta 1C, pues su objetivo era que los estudiantes reflexionaran sobre la noción de restricción.

3.2. *Iniciación de la discusión sobre el concepto de restricción*

El profesor puntualiza su pregunta, con el propósito de que los estudiantes reflexionen en torno a las primeras ideas del concepto de restricción (L74).

L72. Teacher: Ok. So they're entirely the same. So your answer to the second question [1C], would it be entirely the same no matter what, what's the answer to that?
L73. Student 4: Yes
L74. Teacher: It would always be the same. So whatever you put in for number 3 will always give you the same as number 5? There's no exception to that rule?
L75. Student 17: Yeah there is.
L76. Student 4: It's the same equation [i.e., expression], it's always equal.
L77. Student 17: Well I did negative two and it didn't work.
L78. Student 18: If you put in negative two in the fifth one, then the expression's undefined.

Los estudiantes 17 y 18 no dicen porqué $x = -2$ no está en el dominio de la expresión 5 (L77). Ello provoca la pregunta *why* de parte del profesor (L79).

L79. Teacher: Why?
L80. Student 18: Because it will be divide by zero.
L81. Student 17: Ok, because it's a restriction.

De manera más precisa, los estudiantes hablan de la restricción que tiene la expresión 5; sin embargo, el profesor se da cuenta de que los estudiantes no vinculan aún esta restricción con el concepto de equivalencia de las dos expresiones. El profesor continua la discusión con todo el grupo:

> L82. Teacher: So 1st and 4th is ok, but 3rd and 5th?
> L86. Student 18: If you do what he said, and instead factor number 5, and put in negative two as…substitute for x, it will give you the same answer as number 3.

El estudiante 18 (L86) propone la utilización del comando *Factor* para transformar la expresión 5 y, después, hacer la sustitución de $x = -2$ en la expresión simplificada; cuyo propósito es obtener el mismo resultado cuando sustituye $x = -2$ en la expresión 3. Sin embargo, el profesor insiste de nuevo, planteando su pregunta inicial a todo el grupo (L87).

> L87. Teacher: Ok, but when you put negative two into the expression initially
> L88. Class: It says undefined.
> L89. Teacher: So, which is right and which is wrong?

La pregunta que plantea aquí el profesor (L89) tiene la intención de hacer reflexionar a todo el grupo sobre la importancia que tiene el concepto de restricción.

> L90. Student 4: One just isn't formatted properly.
> L91. Teacher: What's the answer if you put negative two in? You put…That's what I asked you, you put negative two in, what's the answer with negative two.
> L92. Student 18: Undefined. Well, negative eighty four, that's what it should be.
> L93. Student 15: What?
> L94. Teacher: "It should be"?
> L95. Student 18: When you factor it and you put in negative two it will give you negative eighty four as the answer.
> L96. Teacher: But are you missing something there?
> L97. Student 18: The restriction.

El profesor cuestiona a los estudiantes para que clarifiquen sus respuestas (L98), pues tiene como intención que eliminen $x = -2$ del dominio de las expresiones 3 y 5.

> L98. Teacher: What is the restriction, what does it mean?
> L99. Student 18: *X* can't equal negative two.
> L100. Teacher: What does it mean, why is that a restriction?
> L101. Student 18: Because you can't divide by zero.
> L102. Teacher: So should it be negative eighty four or should it be undefined?
> L103. Student 18: Undefined.
> L104. Student 4: If you factor it out?
> L105. Teacher: You need to leave the, you need to be aware of that restriction. (Pause) What we're saying is that we can express these in a similar form, yeah. Does everyone understand the concept of a common form?

El profesor se dio cuenta de que el grupo estaba en un *impasse* respecto de la discusión matemática en juego, y decidió dejar un tiempo razonable antes de continuar con la actividad referente al concepto de restricción. Él sabía que en tareas posteriores se volvía a la discusión del concepto de restricción.

3.3. *Continuación de la discusión al día siguiente sobre el concepto de restricción*

Los estudiantes habían completado el trabajo de la Tarea de la Igualdad (Figura 2), en la que hay una ecuación, cuyos miembros son las expresiones 3 y 5. La discusión (L237) inicia con la pregunta sobre el significado de *true* mostrado en la pantalla de la calculadora.

> L237. Teacher: Ok, so we've all got, when we entered in the first part, when you put the thing in, it gives you this as your answer, yeah? True, it's true. The second part means, what does that mean?
>
> L238. Class: It's true. They equal each other. The sides are equivalent.

El profesor planteó una pregunta directa al estudiante 4, para saber cuál era el significado de equivalente (L241).

> L239. Teacher: Can we have one answer at a time. We'll start with student 4.
>
> L240. Student 4: They're equivalent.
>
> L241. Teacher: What do you mean by equivalent?
>
> L242. Student 4: Both sides, when x is replaced by the same value will equal the same thing.

Enseguida, él trata de verificar si todo el grupo está de acuerdo con lo dicho por el estudiante 4 (L243).

> L243. Teacher: Do people agree with him?
>
> L244. Class: Both sides are equal
>
> L245. Teacher: These two things [expressions] are the same [equivalent]. If we go back to what we did yesterday, how could you check? I'm not going to ask you to do it, but how could you check? What's a way of doing that?

El profesor recuerda a todo el grupo lo que habían discutido un día anterior (L245).

> L246. Student 3: Put it in a common form.
>
> L247. Teacher: Put it in a common form. How would you do that? How could you do that?
>
> L248. Student 3: Expand it, factor it.
>
> L249. Teacher: Expand it, factor it, somehow get it into the same form. And this expression, this equals on the calculator, tells you if it's true. Basically it tells you if it's equivalent or not. If you were to express that these were equivalent, how would you express it to give me an answer that is absolutely completely correct?

De nuevo (última frase de L249), él solicita claridad en la respuesta; su intención es que los estudiantes reflexionen sobre el concepto de restricción.

> L250. Student 3: Plug in a value for x, and see if they come out to the same thing.
>
> L251. Teacher: You did that with the last part [Question 3], didn't you?
>
> L252. Student 3: Yeah.
>
> L253. Teacher: And what happened?
>
> L254. Student 5: But negative two is a restriction.

Con la pregunta del profesor (L249), el estudiante 5 (L254) retoma la discusión sobre el concepto de restricción, aunque no menciona la equivalencia de las expresiones 3 y 5.

L255. Teacher: So what happened is that it seems that you are in agreement that the expressions are equivalent, but is there something else we should say?
L256. Student 2: There's a restriction on the second equation [expression], so it wouldn't work. If you plug in negative two on the first equation [expression], it would come out with an answer, a value, but it wouldn't work for the second one.
L257. Teacher: Ok, so it's equivalent. I guess what I'm saying is that if you're saying that these two are equivalent, you need to say the restriction. We've all gotten that far, we can see that they are equivalent, there's various ways of expressing…of checking the equivalence, by putting it in common form, or by using this "equals to" command, but we need to be aware of the restrictions. … But when they're in common form you've already lost something haven't you, by the time you've put it in common form you need to be aware of, so that restriction needs to stay there.

Al final de esta discusión, sobre el concepto de restricción (L257), el profesor toma su papel de *profesor*, pues dice a sus estudiantes qué se debe tomar en cuenta cuando dos expresiones son equivalentes; pone énfasis en el papel de las restricciones de expresiones equivalentes. La discusión posterior revela aspectos interesantes, en torno del surgimiento de ideas de los estudiantes de *forma común* y de *equivalencia*; sin embargo, las limitaciones de especio nos impiden dar evidencias al respecto.

4. Discusión de Resultados y Conclusiones

La discusión que hacemos en esta parte está relacionada con las preguntas de investigación.

i) ¿Cómo conduce el profesor la discusión en clase, en ambientes tecnológicos, usando tareas que motivan el aprendizaje de un contenido matemático especifico?

El profesor inicia la discusión con todo el grupo, planteando preguntas abiertas relacionadas con las tareas resueltas. Por ejemplo: L43: Profesor: "So, 1B, what results did you obtain? Anyone". Una vez que los estudiantes responden la pregunta, el profesor los motiva para que justifiquen sus respuestas (L45, L50), pero no les dice cuál es la respuesta correcta o incorrecta. Cuando los estudiantes usan términos aún no discutidos (L51), el profesor les pide que aclaren sus respuestas (L52) y las justifiquen (L54). Una vez que los estudiantes argumentan sus respuestas, el profesor continua la discusión con todo el grupo (L56).

Las técnicas que facilitaron el discurso del profesor sirvieron de base para organizar y desarrollar las ideas matemáticas del estudiante. Es importante hacer notar que las respuestas de los estudiantes jugaron un papel central en las discusiones individuales y de grupo, pues ello permitió precisar ideas de los conceptos matemáticos en juego. Cuando el profesor creía que era necesario hacer una discusión más rica de contenido matemático, daba tiempo suficiente para que los estudiantes reflexionaran y agregaran más comentarios a sus respuestas; él pasaba de un resultado a otro, y continuaba con la discusión en la siguiente clase o en ella misma (L245).

El profesor no tomaba su papel de *profesor* cuando no era necesario. Por ejemplo, si después de varios intentos para que los estudiantes coordinaran sus ideas sobre los conceptos de restricción y de equivalencia de expresiones algebraicas, y no tenían claro lo que debían decir, él les ayudaba (L257).

ii) ¿Cuál es la naturaleza de las preguntas planteadas por el profesor y por sus estudiantes?

Las preguntas que plantea el profesor a sus estudiantes son básicamente de cuatro tipos:

a) Pregunta a un estudiante particular, solicitando el sentido de su respuesta (L241).
b) Pregunta a todo el grupo, solicitando si está de acuerdo con la idea matemática de un estudiante (L243).
c) La pregunta involucra la coordinación de ideas matemáticas inducidas por un resultado producido por la calculadora (L237).
d) La pregunta involucra coordinación de varias ideas matemáticas (L249).

Las preguntas de los estudiantes, por otro lado, son de los tipos (a) y (c) precedentes. La pregunta de tipo (a) ocurre cuando un estudiante no entiende la explicación o respuesta de otro estudiante; en este caso, la pregunta es corta (L93). El otro tipo de pregunta (c) ocurre cuando el estudiante experimenta un *conflicto* producido por las respuestas de la calculadora, y cuando busca formas de coordinar y decir equivalencia con restricciones (L104).

iii) ¿Cómo se refleja la presencia de la tecnología en sus preguntas y respuestas?

La presencia de la tecnología se nota en las preguntas que involucran la coordinación de una idea matemática con algún resultado producido por la calculadora. La calculadora es una herramienta útil para sustituir números en expresiones algebraicas; sin embargo, esta parte de la tarea no condujo a preguntas inusuales de los estudiantes hasta que sustituyeron $x = -2$ en la expresión 5, pues este valor anula su denominador. El hecho de que el resultado mostrado por la calculadora sea *undefined*, al sustituir $x = -2$ en la expresión 5, no es en sí mismo una dificultad. El conflicto surge cuando los estudiantes hacen sustituciones de forma separada, en las dos expresiones equivalentes, y obtienen diferentes resultados cuando $x = -2$ es sustituido en las expresiones 3 y 5.

Los estudiantes trataron de resolver este *conflicto* factorizando y simplificando la expresión 5, pues así eliminan la restricción y, de esa forma, obtienen el mismo resultado al sustituir $x = -2$ en la expresión 3. También intentaron usar el mismo razonamiento para explicar el resultado *true* dado por la calculadora, cuando introdujeron la igualdad formada por la expresiones 3 y 5.

Las dificultades de los estudiantes, en la coordinación de ideas matemáticas en torno a los conceptos de restricción y de equivalencia de expresiones algebraicas, fueron provocadas por las tareas diseñadas, y por el uso de CAS. La herramienta (CAS) ayudó a la discusión en clase y propició el refinamiento de ideas sobre los conceptos matemáticos en juego. Es posible fomentar el aprendizaje de los estudiantes, en el salón de clases, si se da un manejo apropiado de la herramienta. La manera en la que este profesor condujo la discusión en el salón de clases nos muestra un modelo de su práctica, donde las matemáticas y la motivación de los estudiantes inciden en el surgimiento de su pensamiento matemático.

Agradecimientos

La investigación presentada en este artículo fue posible gracias al apoyo financiero de: Social Sciences and Humanities Research Council of Canada – INE Grant # 501-2002-0132, el Ministère des Relations Internationales (Québec) y CONACYT (México) – Grant # U49788-H. De igual forma, expresamos nuestro agradecimiento a los estudiantes y al profesor que participaron en esta investigación.

Referencias

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of PME* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu, HI: PME.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2007). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M.K. Heid & G.W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: syntheses, cases, and perspectives* (pp. 363-385). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11: 205-263.

Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59: 269-298.

Sherin, G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5: 205-233.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interaction in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9: 281-307.