La technologie aide parfois à réduire le niveau mathématique requis, mais à quel prix ?

André Boileau, UQAM

Congrès de l'AMQ, Rimouski, Octobre 2010

Résumé

**La technologie aide parfois à réduire
le niveau mathématique requis, mais à quel prix ?**

Nous donnerons quelques exemples représentatifs de problèmes qui peuvent être résolus à l'aide de la technologie en faisant appel à des outils mathématiques plus élémentaires que ceux utilisés dans des solutions purement mathématiques.

En parallèle, nous discuterons des questions suivantes :

- Y a-t-il un principe de conservation de la difficulté globale, selon lequel certaines difficultés mathématiques pourraient être transformées en difficultés technologiques, ou vice-verça ?
- Que gagne-t-on et que perd-t-on quand on remplace mathématique par technologie, ou vice-verça ?

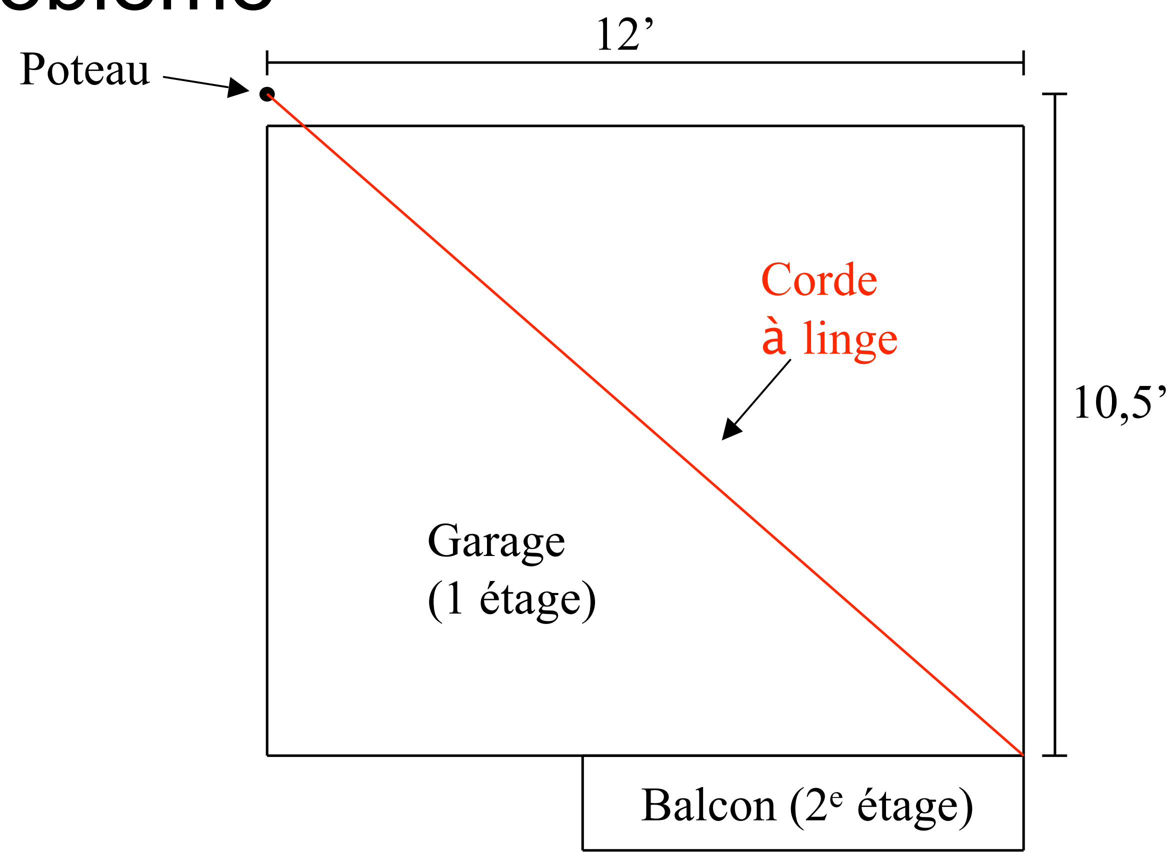
Plan de la présentation

- En guise d’introduction: *Corde à linge*
- Quelques exemples
  - Analyse numérique :
    Fonctions transcendantes, zéros
  - Simulations :
    Éteindre un feu, hypothèques, collections
- Conclusion

Introduction : Corde à linge

Introduction : Corde à linge

- Le problème



Introduction : Corde à linge

- Solutions possibles (longueur simple)
  - Valeur exacte : $\frac{3}{2}\sqrt{113}$
    (Via Pythagore)
  - Valeur approchée : $\approx$15.94521872
    (en utilisant, en plus, une calculatrice)
  - Via dessin à l'échelle et mesure : $\approx$16
    (*Ce qui est amplement suffisant* ***en pratique***)

Calcul des fonctions transcendantes (cos)

- Approche standard pour calculer cos(*x*)
  - Soit *a* ≡ *x* modulo 2π
  - On utiliser la série de Taylor (choix de *n*)

$$1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\frac{a^6}{6!}+\frac{a^8}{8!}-\frac{a^{10}}{10!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}$$

- Mais ce n'est pas accessible à tous…
  (Certainement pas de niveau secondaire)

Calcul des fonctions transcendantes (cos)

- Approche avec niveau math moindre
  - On peut se ramener à des angles entre 0° et 90°
  - On connaît les valeurs cos(0°) et cos(90°)
  - Si on connaît le cosinus de deux angles
    alors on connaît le cosinus de leur moyenne

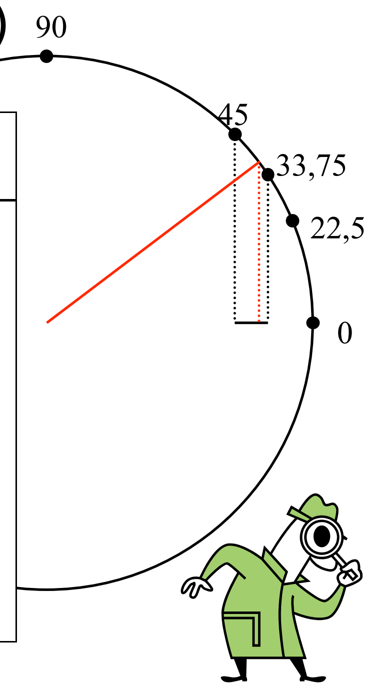
$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(a+b)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos a\cos b-\sin a\sin b}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos a\cos b-\sqrt{1-\cos^2 a}\sqrt{1-\cos^2 b}}{2}}$$

Calcul des fonctions transcendantes (cos)

- Approche avec niveau math moindre (suite)
  - D’où on peut coincer notre angles dans des intervalles de plus en plus petits
    (à chaque fois de longueur divisée par deux)

Approximations de l’angle de 37°	**Approximations de cos(37)**
$0 \le 37 \le 90$	$\cos(0) \ge \cos(37) \ge \cos(90)$
$0 \le 37 \le 45 = \frac{0+90}{2}$	$\cos(0) \ge \cos(37) \ge \cos(45) = \cos\left(\frac{0+90}{2}\right)$
$\frac{0+45}{2} = 22.5 \le 37 \le 45$	$\cos\left(\frac{0+45}{2}\right) = \cos(22.5) \ge \cos(37) \ge \cos(45)$
$\frac{22.5+45}{2} = 33.75 \le 37 \le 45$	$\cos\left(\frac{22.5+45}{2}\right) = \cos(33.75) \ge \cos(37) \ge \cos(45)$

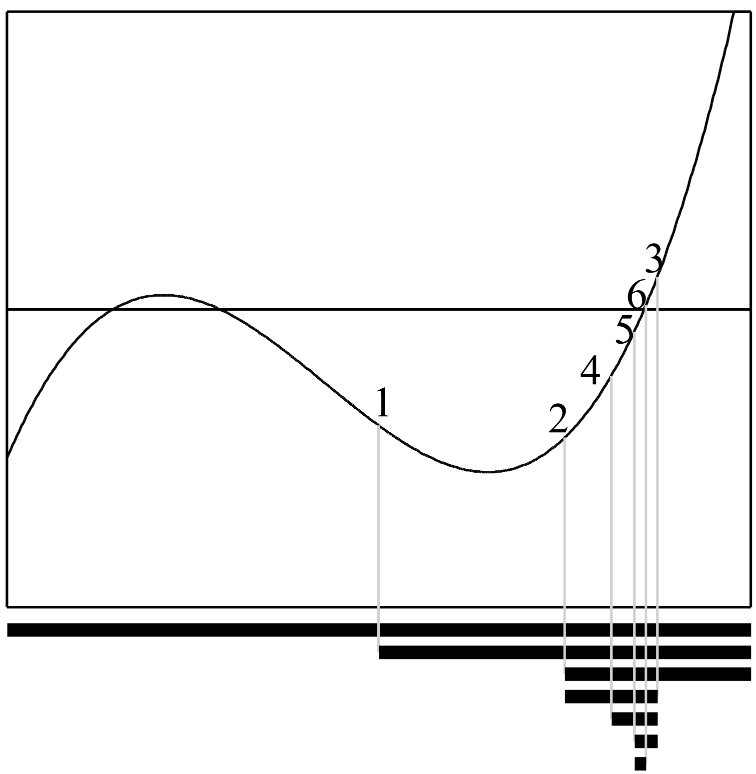


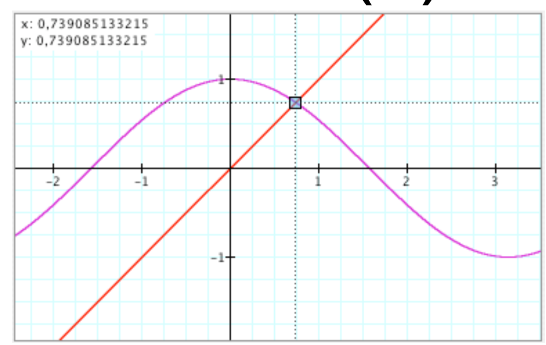
Calcul des zéros (via bissection)

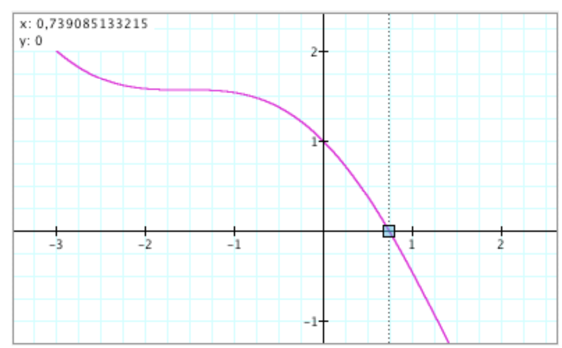
- Parfois, on ne peut trouver de formule exacte pour exprimer certains objets mathématiques remarquables
  - Exemple : primitive de $\sin(x^2)$
  - Exemple : solution de « $\cos(x) = x$ »
- Mais on peut facilement en obtenir des représentations approchées

Calcul des zéros (via bissection)

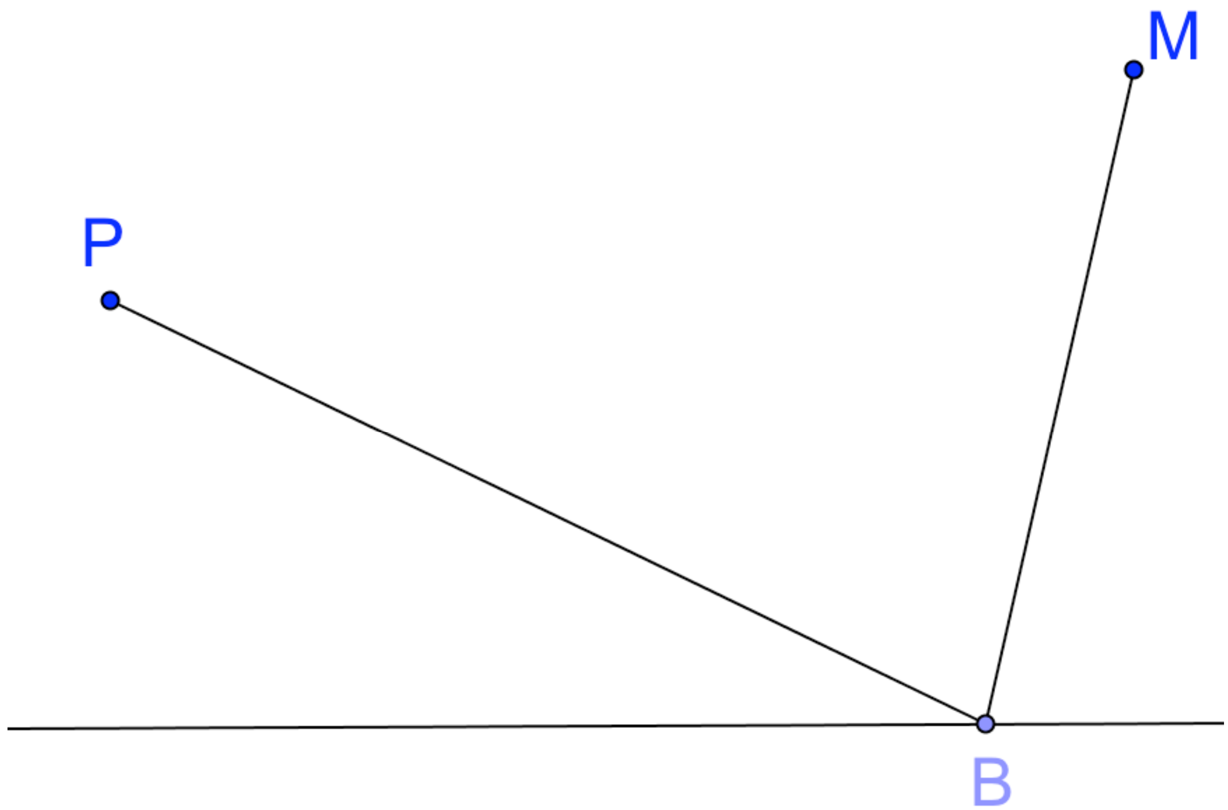
- Méthode de bissection appliquée à la fonction « cos(x)-x »







Éteindre un feu de façon efficace



Remboursements hypothécaires

- Calcul des remboursements mensuels avec des outils mathématiques **limités** : À chaque mois
  - Ajouter les intérêts
  - Soustraire le remboursement supposé
- À la fin, ajuster itérativement le remboursement pour obtenir une dette cumulée de zéro

Collection de cartes de hockey

Collection de 7 cartes de hockey

- Combien de boîtes de céréales faut-il acheter en moyenne pour compléter sa collection ?
  - Approche théorique non-triviale
- Approche alternative simple via des simulations répétées
  - Solution approchée en faisant la moyenne

Conclusion

- Prof doit clarifier les objectifs poursuivis
  - Si on désire une solution approchée
    - Technologie souvent plus simple
    - Mais maths plus sophistiquées apportent souvent exactitude, efficacité et généralité
  - Si on désire solution exacte (et comprise)
    - Approche math plus appropriée
      … mais pas toujours disponible
    - Techno parfois la seule façon d’avancer
      … et permet parfois d’affiner nos intuitions