Sur quelles bases aborder la règle des signes

André Boileau et Louis Charbonneau[1], Section didactique,
Département de mathématiques, UQAM
(boileau.andre@uqam.ca et charbonneau.louis@uqam.ca)

Pourquoi parler encore de la règle des signes?

Depuis le temps que la règle des signes a été énoncée[2], on pourrait s'attendre à ce que la situation ait été complètement élucidée et que tous (à tout le moins tous les professeurs de mathématiques) puissent en donner une explication simple, claire, complète et entièrement satisfaisante. Malheureusement, ce n'est pas le cas. À de nombreuses occasions, que ce soit lors de conversations à bâtons rompus, lors d'ateliers à des congrès ou même en consultant divers manuels, on entend des explications qui se veulent satisfaisantes, mais qui ne le sont pas du tout.

Prenons par exemple la suite d'affirmations suivantes

Les amis de mes amis sont mes amis	(+) x (+) = (+)
Les ennemis de mes amis sont mes ennemis	(-) x (+) = (-)
Les amis de mes ennemis sont mes ennemis	(+) x (-) = (-)
Les ennemis de mes ennemis sont mes amis	(-) x (-) = (+)

censée apporter une certaine vraisemblance à la règle des signes. On peut se poser de nombreuses questions sur le sérieux de cette correspondance entre « ami » et le signe « + » et « ennemi » et le signe « - », à commencer par le fait que des personnes qui ne sont pas amies ne sont pas nécessairement des ennemis. De même, on a peine à voir quel est l'analogue de la multiplication dans le monde des amis et des ennemis. Mais surtout, il est clair que ces affirmations sont parfois fausses : en effet, on imagine mal un policier soutenir que

les ennemis (les *Rock Machines*) de mes ennemis (les *Hells Angels*) sont mes amis.

Comment donc des affirmations aussi problématiques pourraient-elles jeter quelque lumière que ce soit sur la règle des signes?

[1] Nous tenons à remercier Christian Boissinotte, Michel Coupal, Maurice Garançon et David Guillemette, qui ont lu une version préliminaire de cet article et qui ont apporté de précieuses suggestions.

[2] Les germes de cette règle remontent à Diophante, vers la fin du III[e] siècle après Jésus-Christ. Voir à ce sujet l'article de Georges Glaeser, *Épistémologie des nombres relatifs* in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 2 #3 pp 303-346, 1981.

Justification de la règle des signes

On pourrait encore considérer de nombreuses « explications » avancées pour justifier la règle des signes, et préciser pourquoi elles ne sont pas entièrement satisfaisantes. Nous allons plutôt, sans plus attendre, énoncer les raisons que nous avançons pour justifier la règle des signes :

1. La règle des signes découle de la définition même de la multiplication de nombres signés (positifs et négatifs).
2. Cette définition est raisonnable et utile, de façon à faire l'objet d'un consensus social.

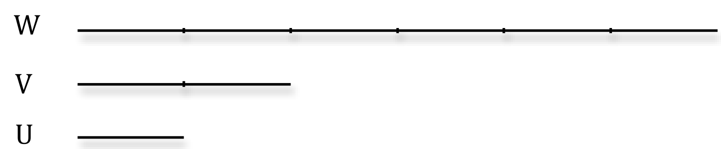
Certains d'entre vous ont peut-être sourcillé à la vue de notre première raison, en se disant que ça n'explique pas grand-chose, que c'est une espèce de cercle vicieux. Pour clarifier cette première raison, imaginons que nous vivons à une époque où les nombres pour compter et mesurer sont utilisés, mais où personne n'a jamais parlé de nombres négatifs. Rien ne nous empêche d'ajouter de nouveaux nombres (qualifiés de « négatifs ») à nos anciens nombres (maintenant dits « positifs ») et de spécifier *selon notre bon vouloir* comment opérer sur tous ces nombres : c'est précisément ce que dit la raison 1.

Mais, en pratique, cette liberté d'ajouter de nouveaux objets mathématiques se heurte à une forme de consensus social : si nous ne voulons pas rester seuls à utiliser nos nouveaux nombres, nous devons expliquer au reste du monde les raisons d'un tel ajout. En effet, si nous avions décidé d'ajouter non pas une nouvelle sorte de nombres (les négatifs), mais bien sept, et de définir les opérations usuelles sur tous nos « nombres » de façon arbitraire, il y fort à parier que nous serions restés les seuls à utiliser notre création farfelue. C'est donc ici qu'intervient notre seconde raison : nos définitions doivent être raisonnables et utiles.

Revenons donc aux nombres négatifs : on les ajoute pour quoi faire? On pourrait chercher dans l'histoire des mathématiques les motivations pour l'introduction des nombres négatifs, mais on serait peut-être déçus. En effet, les nombres négatifs semblent avoir été utilisés au départ pour mener à bien certains calculs. À l'époque, on ne pouvait donner beaucoup de sens à ces calculs, mais les résultats obtenus eux étaient significatifs, ce qui justifiait en quelque sorte, a posteriori, le passage par le monde « imaginaire » des négatifs (et des complexes). Ce n'est que plus tard qu'on a réussi à donner du sens à tout ça, et ceci explique peut-être pourquoi les nombres négatifs (et complexes) ont gardé même aujourd'hui une certaine aura de mystère...

Replaçons-nous donc dans notre contexte d'inventeur des nombres négatifs, et imaginons une raison valable pour laquelle nous aurions pu vouloir introduire ces nouveaux nombres. Nous avons déjà mentionné que les nombres positifs pouvaient être utilisés dans le contexte du dénombrement d'objets et de la mesure (de longueurs, de surfaces, de solides, du temps, etc.).

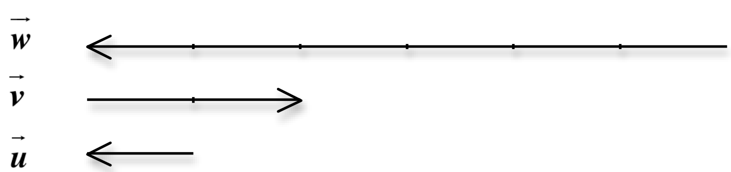
Rappelons-nous d'abord comment on peut aborder la multiplication dans le contexte de la mesure des segments à l'aide de nombres non signés. Considérons un exemple simple mettant en jeu trois segments U, V et W tel qu'illustré dans la figure ci-dessous.



On peut mesurer W en utilisant V comme unité de mesure, obtenant W = a•V (où a=3 dans le cas illustré). De même, on peut mesurer V en utilisant cette fois U comme unité de mesure, obtenant V = b•U (où b=2 dans le cas illustré). Sur la figure, on peut constater que W = 6•U = (3×2)•U. On voit, dans ce contexte, que le besoin d'avoir une multiplication découle du besoin de pouvoir passer d'une unité de mesure à une autre.

En conclusion, une des façons de *définir*[3] la multiplication $a \times b$ est donc d'affirmer qu'elle correspond à la mesure de W à l'aide de l'unité U. Il est à noter qu'il s'agit là d'une définition générale, qui fonctionne pour tous les nombres positifs, qu'ils soient naturels, rationnels ou irrationnels.

Supposons maintenant que nous voulons « mesurer » les déplacements d'un objet, ce qui nous conduit à généraliser le contexte des distances afin de pouvoir donner une orientation et une direction à celles-ci. Pour simplifier, nous nous placerons dans le cas unidimensionnel[4]. Considérons un exemple très simple mettant en jeu trois déplacements $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, tel qu'illustré ci-dessous.



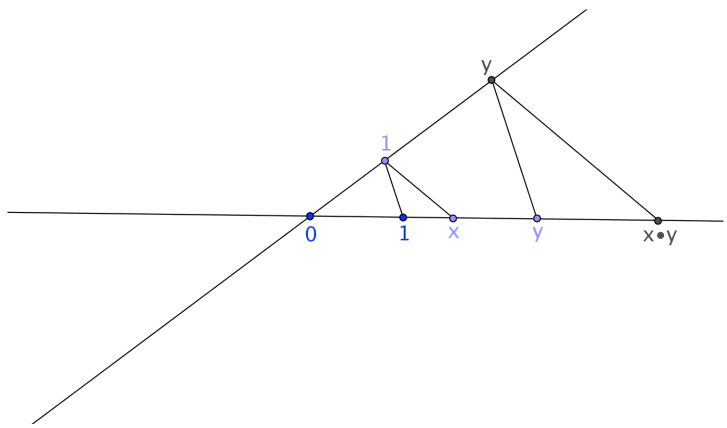
On peut « mesurer » $\vec{w}$ à l'aide de $\vec{v}$, obtenant $\vec{w} = a \bullet \vec{v}$ (où a = -3 dans le cas illustré). De même, on peut « mesurer » $\vec{v}$ à l'aide de $\vec{u}$, obtenant $\vec{v} = b \bullet \vec{u}$ (avec b = -2 dans la figure). En généralisant la *définition* de la multiplication des nombres positifs (décrite ci-dessus) aux nombres signés, on dira que le produit $a \times b$ s'obtient en « mesurant » $\vec{w}$ à l'aide de $\vec{u}$, ce qu'on écrit $\vec{w} = (a \times b) \bullet \vec{u}$. Dans notre exemple, on a d'une part $\vec{w} = ((-3)\times(-2)) \bullet \vec{u}$ [par définition], et d'autre part $\vec{w} = 6 \bullet \vec{u}$ [par observation directe] : on a donc (-3)×(-2) = (+6). De façon semblable, on obtiendrait (-3)×(+2) = (-6), (+3)×(-2) = (-6), et (+3)×(+2) = (+6). On peut étendre ce

[3] Vous êtes peut-être plus familiers avec la définition de la multiplication comme une addition répétée. Mais on doit souligner que cette définition n'est valable que pour les nombres entiers naturels, tandis que la définition de multiplication via un changement d'unité de mesure s'applique à tous les nombres positifs. Ce qui n'empêche pas d'avoir une version correspondante pour les nombres naturels, soit le changement d'unité de dénombrement. Dans ce contexte, l'exemple ci-dessus devient : si une boîte W contient a petites boîtes V, et si chaque boîte V contient b objets, alors la boîte W contient $a \times b$ objets.
[4] Plus tard, il sera toujours temps de repérer nos objets par un couple de nombres (dans le plan), un triplet de nombres (dans l'espace), un quadruplet de nombres (dans l'espace-temps), etc.

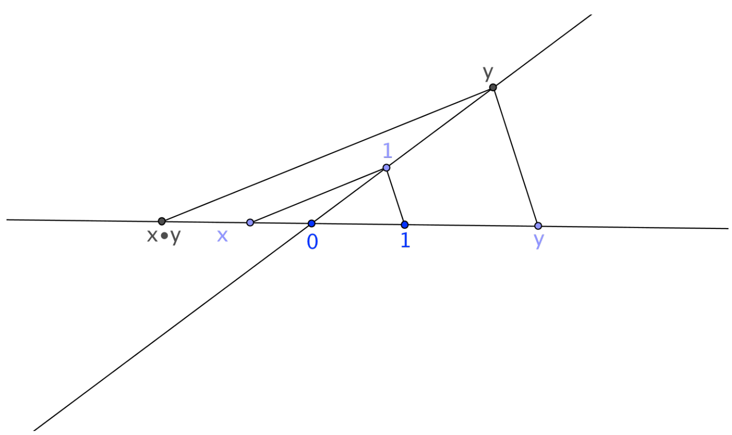
raisonnement non seulement aux autres nombres entiers, mais à tous les nombres réels a et b : on obtient alors la règle des signes dans toute sa généralité.

Multiplication signée et théorème de Thalès

On vient de voir que la règle des signes a été établie de façon raisonnable, comme prolongement direct de la définition de multiplication des nombres positifs en termes de changement d'unité de mesure. La multiplication de nombres positifs intervient aussi dans d'autres contextes (théorème de Thalès, mouvement rectiligne uniforme, etc.), et il est intéressant de voir ce qui se produit quand on les étend aux nombres signés. Nous verrons non seulement que notre définition se comporte bien dans ces autres contextes, mais aussi qu'elle peut être éclairante.
Dans la figure ci-dessous, le théorème de Thalès nous a permis de construire le produit $x•y$ de deux nombres positifs x et y placés sur une droite numérique, par une construction mettant en jeu deux paires de segments parallèles[5].

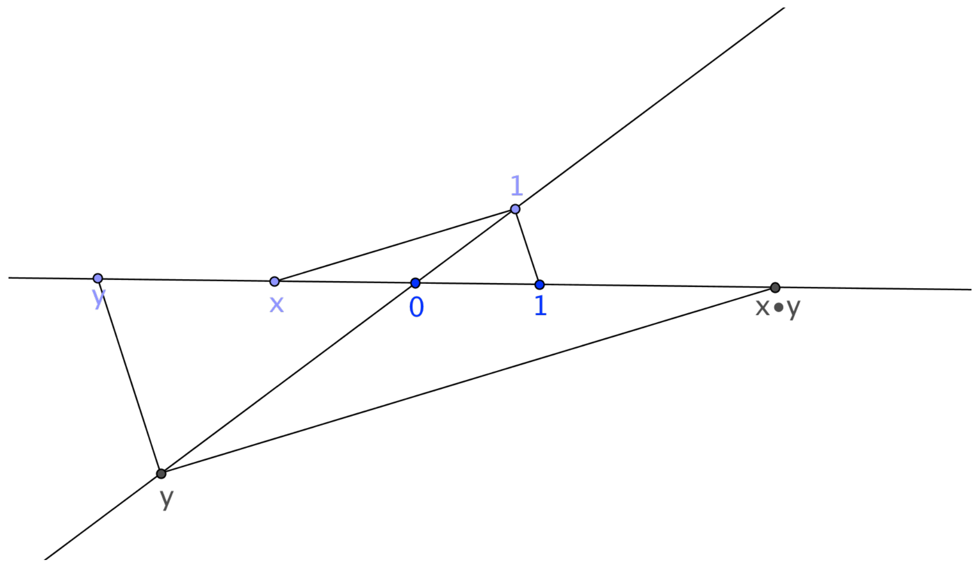


Si on fait glisser l'un des nombres (disons x) du côté négatif, on constate que la construction utilisée fait aussi passer le produit $x•y$ du côté négatif.



[5] Le lecteur pourra trouver à la page web suivante
http://www.math.uqam.ca/~boileau/RegleSignes.html
une figure GeoGebra permettant de réaliser les manipulations décrites dans le texte.

Si ensuite on fait glisser le second nombre du côté négatif, on constate que la même construction va ramener *x•y* du côté positif. C'est la règle des signes en action!



On constate donc que cette construction basée sur le théorème de Thalès nous permet d'obtenir le produit de deux nombres même quand certains de ceux-ci deviennent négatifs.

Multiplication signée et mouvement uniforme

Nous avons vu un premier exemple illustrant l'utilité et la pertinence de la définition de la multiplication de nombres signés que nous avons donnée, et de la règle des signes qui en a découlé. Examinons maintenant un second contexte où la multiplication joue un rôle crucial, et où l'introduction de nombres signés peut apporter un nouvel éclairage. Rappelons tout d'abord la situation, dans le cas d'un mouvement uniforme où toutes les grandeurs sont positives : on a alors la relation

distance parcourue = vitesse x temps

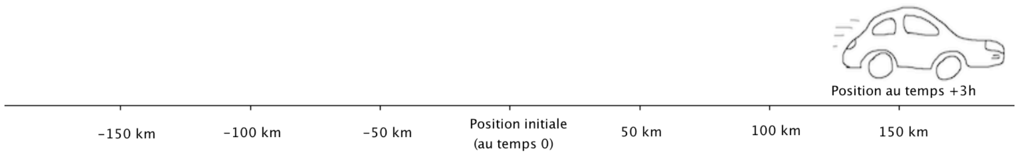
Par exemple, si une automobile circule à 50 km/h pendant 3 h, elle parcourra

(150 km) = (50 km/h) x (3 h).

Voyons comment les grandeurs en présence peuvent acquérir un signe dans le contexte d'une automobile circulant sur une route. **Par convention**, on fixe l'origine à la position au temps $t = 0$; on peut associer le signe (+) aux positions à droite de l'origine, aux vitesses allant vers la droite, et aux intervalles de temps futurs; on associera alors le signe (-) aux positions à gauche de l'origine, aux vitesses allant vers la gauche, et aux intervalles de temps passés. Voyons maintenant comment se comporte la formule *position* = *vitesse* x *temps* dans ce contexte :

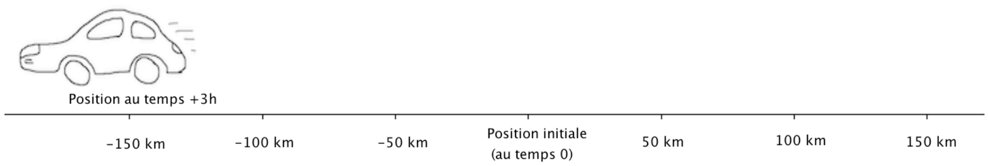
(+150 km) = (+50 km/h) x (+3 h)

50 km/h vers la droite et dans 3 h → on sera à 150 km à droite de l'origine



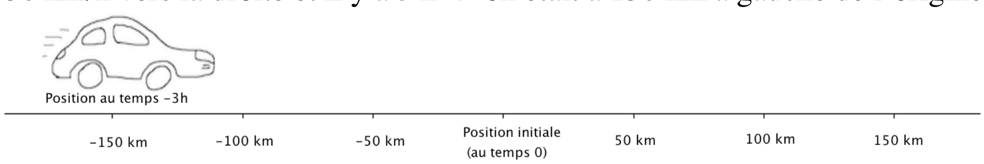
(-150 km) = (-50 km/h) x (+3 h)

50 km/h vers la gauche et dans 3 h → on sera à 150 km à gauche de l'origine



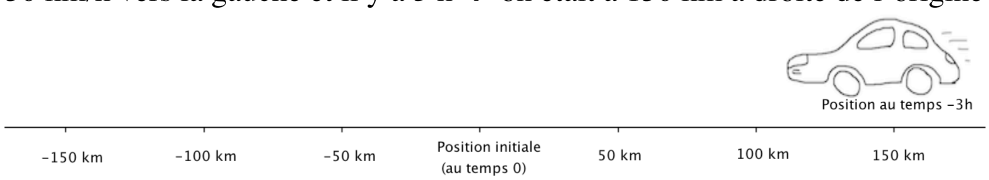
(-150 km) = (+50 km/h) x (-3 h)

50 km/h vers la droite et il y a 3 h → on était à 150 km à gauche de l'origine



(+150 km) = (-50 km/h) x (-3 h)

50 km/h vers la gauche et il y a 3 h → on était à 150 km à droite de l'origine



On constate donc que la règle des signes nous permet non seulement de conserver, mais aussi d'étendre le sens et la portée d'une formule physique fondamentale. Voilà donc un second exemple illustrant l'utilité et la pertinence de la définition de la multiplication de nombres signés que nous avons donnée, et de la règle des signes qui en a découlé.

Une « preuve » algébrique
(ou Ce pourquoi certaines explications sont insatisfaisantes)

On rencontre parfois des justifications de la règle des signes prenant la forme d'une preuve algébrique, qui peut ressembler à celle que nous vous présenterons ci-dessous. La « preuve » débute par la suite d'égalités suivante

$$(-a)(-b)+a(-b)=\big((-a)+a\big)(-b)=0(-b)=0=a0=a\big(b+(-b)\big)=ab+a(-b)$$

où chaque égalité est justifiée par une propriété bien connue (distributivité de la multiplication sur l'addition, la somme d'un nombre et de son opposé est nulle, 0 est un élément absorbant).

Si on enlève $a(-b)$ des deux côtés[6], on obtiendra $(-a)(-b) = ab$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on pourrait obtenir de façon semblable les autres cas de la règle des signes : $(-a)b = a(-b) = -(ab)$. Cette preuve paraît habituellement très convaincante, car elle est formulée en termes d'une mathématique symbolique, est très détaillée, et repose sur des propriétés algébriques très connues et en lesquelles on a une très grande confiance.

Mais en y pensant bien, *qu'est-ce qui nous assure que toutes ces belles propriétés restent valides lorsqu'on ajoute les nombres négatifs*? Après tout, il y a des exemples de propriétés « évidentes » qui cessent d'être universellement vraies quand les nombres négatifs entrent en jeu. Un exemple particulièrement simple est l'implication

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$$

qui est vérifiée pour tous les nombres positifs, mais qui est mise en échec dans le cas où a = -1 et b = 1.

On voit donc qu'il faudrait d'abord démontrer ces propriétés dans le contexte des nombres signés avant de pouvoir les utiliser comme ci-dessus. Et ceci n'est possible qu'en faisant appel aux *définitions* de l'addition et de la multiplication des nombres signés[7]. Mais, à ce compte-là, il apparaît plus simple et plus éclairant de démontrer la règle des signes directement à partir de la définition de la multiplication des nombres signés, comme nous l'avons fait précédemment.

Nous arrivons donc au terme de notre brève visite de la règle des signes. Nous pourrions continuer et examiner d'autres explications visant à justifier cette fameuse règle, mais nous arriverions à chaque fois à la même conclusion : elles reposent toutes, ultimement, sur une définition de l'extension de la multiplication aux nombres signés. De même, en examinant d'autres contextes où on pourrait être amené à multiplier des nombres signés, on constaterait que la règle des signes apporte une interprétation raisonnable et utile.

Mais que faire avec les élèves?

Jusqu'à présent, nous nous sommes adressés à vous, professeurs de mathématiques à l'ordre secondaire, et nous avons tenté de tenir une argumentation *convaincante pour vous*. Vient maintenant le problème de l'adaptation de cette argumentation pour vos élèves. Dans ce contexte, il nous semble préférable de privilégier la simplicité, même si nos explications laissent un peu à désirer d'un point de vue épistémologique. Vous trouverez ci-dessous un scénario possible…

Nous pensons qu'il est judicieux de reprendre une des idées exprimées précédemment : de proposer à la classe d'imaginer que les nombres négatifs n'ont pas encore été introduits, et que notre tâche est de *les définir de façon raisonnable*. En particulier, on veut définir la multiplication quand au moins un des facteurs est négatif. Pour rendre la discussion plus

---

[6] Les propriétés sous-entendues utilisées ici sont l'existence d'un opposé, l'associativité de l'addition, la somme d'un nombre et de son opposé est nulle, et 0 est un neutre additif.

[7] En passant, on peut voir le fait que ces propriétés restent vraies dans le nouveau contexte des nombres signés comme un indice que ces *définitions* sont utiles et raisonnables.

concrète[8], disons qu'on veut déterminer la valeur de (-7)x(-8). On commence donc par considérer la table de multiplication suivante, qui ne pose pas de problème puisque tous les facteurs sont positifs. Jetons un coup d'œil sur la ligne du haut de cette table : on remarque alors que, lorsqu'on passe d'une case à la case immédiatement à gauche, le résultat de la multiplication diminue de 8.

1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56
1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49
1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42
1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35
1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28
1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21
1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14
1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7

La tentation est grande de compléter cette ligne vers la gauche en continuant de soustraire 8 à chaque fois, obtenant alors le résultat suivant :

-7x8=-56	-6x8=-48	-5x8=-40	-4x8=-32	-3x8=-24	-2x8=-16	-1x8=-8	**0x8=0**	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56

Soulignons ici que nous restons libres de déterminer la valeur de (-7)x8 comme nous le voulons[9], mais que le choix de (-56) nous semble raisonnable dans le contexte. Si nous faisons la démarche précédente, non seulement pour la ligne du haut mais aussi pour toutes les lignes de la table, on obtient

-7x8=-56	-6x8=-48	-5x8=-40	-4x8=-32	-3x8=-24	-2x8=-16	-1x8=-8	**0x8=0**	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56
-7x7=-49	-6x7=-42	-5x7=-35	-4x7=-28	-3x7=-21	-2x7=-14	-1x7=-7	**0x7=0**	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49
-7x6=-42	-6x6=-36	-5x6=-30	-4x6=-24	-3x6=-18	-2x6=-12	-1x6=-6	**0x6=0**	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42
-7x5=-35	-6x5=-30	-5x5=-25	-4x5=-20	-3x5=-15	-2x5=-10	-1x5=-5	**0x5=0**	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35
-7x4=-28	-6x4=-24	-5x4=-20	-4x4=-16	-3x4=-12	-2x4=-8	-1x4=-4	**0x4=0**	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28
-7x3=-21	-6x3=-18	-5x3=-15	-4x3=-12	-3x3=-9	-2x3=-6	-1x3=-3	**0x3=0**	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21
-7x2=-14	-6x2=-12	-5x2=-10	-4x2=-8	-3x2=-6	-2x2=-4	-1x2=-2	**0x2=0**	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14
-7x1=-7	-6x1=-6	-5x1=-5	-4x1=-4	-3x1=-3	-2x1=-2	-1x1=-1	**0x1=0**	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7

On peut alors remarquer que, dans la colonne de gauche, quand on passe d'une case à la case située immédiatement au-dessous, le résultat de la multiplication augmente de 7. On peut d'ailleurs constater des régularités arithmétiques semblables pour toutes les colonnes. Ce qui nous conduit à compléter le tableau comme suit

---

[8] En fait, on pourrait répéter cette discussion pour plusieurs exemples, avant de faire remarquer qu'il s'agit, à chaque fois, de cas particuliers d'un argument général.

[9] En effet, même si nous avons constaté une régularité, ceci ne constitue pas une preuve que celle-ci doive se poursuivre en dehors du domaine où nous l'avons constatée. On pourrait donner le contre-exemple suivant, évoqué plus haut : l'énoncé « si un nombre est plus petit qu'un autre, alors le quotient du premier par le second est plus petit que le quotient du second par le premier » est toujours vérifié pour les nombres positifs (exemple $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$), mais n'est plus toujours vrai si ces nombres peuvent être négatifs (exemple $\frac{-5}{-4} > \frac{-4}{-5}$).

-7x8=-56	-6x8=-48	-5x8=-40	-4x8=-32	-3x8=-24	-2x8=-16	-1x8=-8	**0x8=0**	1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56
-7x7=-49	-6x7=-42	-5x7=-35	-4x7=-28	-3x7=-21	-2x7=-14	-1x7=-7	**0x7=0**	1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49
-7x6=-42	-6x6=-36	-5x6=-30	-4x6=-24	-3x6=-18	-2x6=-12	-1x6=-6	**0x6=0**	1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36	7x6=42
-7x5=-35	-6x5=-30	-5x5=-25	-4x5=-20	-3x5=-15	-2x5=-10	-1x5=-5	**0x5=0**	1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	6x5=30	7x5=35
-7x4=-28	-6x4=-24	-5x4=-20	-4x4=-16	-3x4=-12	-2x4=-8	-1x4=-4	**0x4=0**	1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16	5x4=20	6x4=24	7x4=28
-7x3=-21	-6x3=-18	-5x3=-15	-4x3=-12	-3x3=-9	-2x3=-6	-1x3=-3	**0x3=0**	1x3=3	2x3=6	3x3=9	4x3=12	5x3=15	6x3=18	7x3=21
-7x2=-14	-6x2=-12	-5x2=-10	-4x2=-8	-3x2=-6	-2x2=-4	-1x2=-2	**0x2=0**	1x2=2	2x2=4	3x2=6	4x2=8	5x2=10	6x2=12	7x2=14
-7x1=-7	-6x1=-6	-5x1=-5	-4x1=-4	-3x1=-3	-2x1=-2	-1x1=-1	**0x1=0**	1x1=1	2x1=2	3x1=3	4x1=4	5x1=5	6x1=6	7x1=7
-7x0=0	**-6x0=0**	**-5x0=0**	**-4x0=0**	**-3x0=0**	**-2x0=0**	**-1x0=0**	0x0=0	**1x0=0**	**2x0=0**	**3x0=0**	**4x0=0**	**5x0=0**	**6x0=0**	**7x0=0**
-7x-1=7	-6x-1=6	-5x-1=5	-4x-1=4	-3x-1=3	-2x-1=2	-1x-1=1	**0x-1=0**	1x-1=-1	2x-1=-2	3x-1=-3	4x-1=-4	5x-1=-5	6x-1=-6	7x-1=-7
-7x-2=14	-6x-2=12	-5x-2=10	-4x-2=8	-3x-2=6	-2x-2=4	-1x-2=2	**0x-2=0**	1x-2=-2	2x-2=-4	3x-2=-6	4x-2=-8	5x-2=-10	6x-2=-12	7x-2=-14
-7x-3=21	-6x-3=18	-5x-3=15	-4x-3=12	-3x-3=9	-2x-3=6	-1x-3=3	**0x-3=0**	1x-3=-3	2x-3=-6	3x-3=-9	4x-3=-12	5x-3=-15	6x-3=-18	7x-3=-21
-7x-4=28	-6x-4=24	-5x-4=20	-4x-4=16	-3x-4=12	-2x-4=8	-1x-4=4	**0x-4=0**	1x-4=-4	2x-4=-8	3x-4=-12	4x-4=-16	5x-4=-20	6x-4=-24	7x-4=-28
-7x-5=35	-6x-5=30	-5x-5=25	-4x-5=20	-3x-5=15	-2x-5=10	-1x-5=5	**0x-5=0**	1x-5=-5	2x-5=-10	3x-5=-15	4x-5=-20	5x-5=-25	6x-5=-30	7x-5=-35
-7x-6=42	-6x-6=36	-5x-6=30	-4x-6=24	-3x-6=18	-2x-6=12	-1x-6=6	**0x-6=0**	1x-6=-6	2x-6=-12	3x-6=-18	4x-6=-24	5x-6=-30	6x-6=-36	7x-6=-42
-7x-7=49	-6x-7=42	-5x-7=35	-4x-7=28	-3x-7=21	-2x-7=14	-1x-7=7	**0x-7=0**	1x-7=-7	2x-7=-14	3x-7=-21	4x-7=-28	5x-7=-35	6x-7=-42	7x-7=-49
-7x-8=56	-6x-8=48	-5x-8=40	-4x-8=32	-3x-8=24	-2x-8=16	-1x-8=8	**0x-8=0**	1x-8=-8	2x-8=-16	3x-8=-24	4x-8=-32	5x-8=-40	6x-8=-48	7x-8=-56

et à constater qu'il semble tout à fait raisonnable de déterminer la valeur de (-7)x(-8) comme étant (+56).

Mais il y a plus : au lieu de considérer d'abord la ligne du haut puis la colonne de gauche, nous aurions pu considérer d'abord la colonne de droite puis la ligne du bas. Nous aurions obtenu le même résultat : comme l'a déjà dit un élève après avoir vécu cette démarche, « ça balance! ».

Soulignons en terminant que, encore ici, il ne s'agit pas là d'une preuve de la règle des signes, mais bien d'une démarche indiquant qu'il est tout à fait raisonnable de définir la multiplication des nombres signés de telle sorte que la règle des signes soit vérifiée. En tout état de cause, c'est le choix retenu par les mathématiciens à travers les âges!