Programmer ave

... po

André Boileau
Professeur retraité
Section didactique, Département de mathématiques, UQAM
boileau.andre@uqam.ca

Je ne sais pas si c'est la même chose pour vous, mais j'ai toujours été intrigué par le nombre π. Je me rappelle qu'on m'avait dit au départ que π valait approximativement $\frac{22}{7}$ et, plus tard, on avait ajouté de la précision : $\pi \approx 3{,}1416$. Encore plus tard, on avait ajouté que la valeur exacte de π comportait une infinité de décimales

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971…

et que certains avaient déployé des efforts considérables pour en calculer des valeurs approchées.

Je me souviens de ma tristesse quand j'ai appris l'histoire de William Shanks[2], un professeur de mathématique qui s'était attaqué au calcul de π. Il avait utilisé la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

qui avait déjà servi à calculer π avec une précision de 100 décimales. Shanks passa une vingtaine d'années de sa vie à calculer un nombre record de décimales de π. En 1873, il publie un ouvrage révélant 707 décimales de π. Malheureusement, seules les 527 premières étaient correctes. Malgré tout, il conserve à ce jour le record pour le plus grand nombre de décimales de π calculées *à la main*.

De nos jours, il suffit d'aller sur le web pour obtenir des valeurs approchées de π comportant plusieurs millions de décimales[3]. De son côté, le GRMS a déjà distribué un chandail affichant les 860 premières décimales de π.

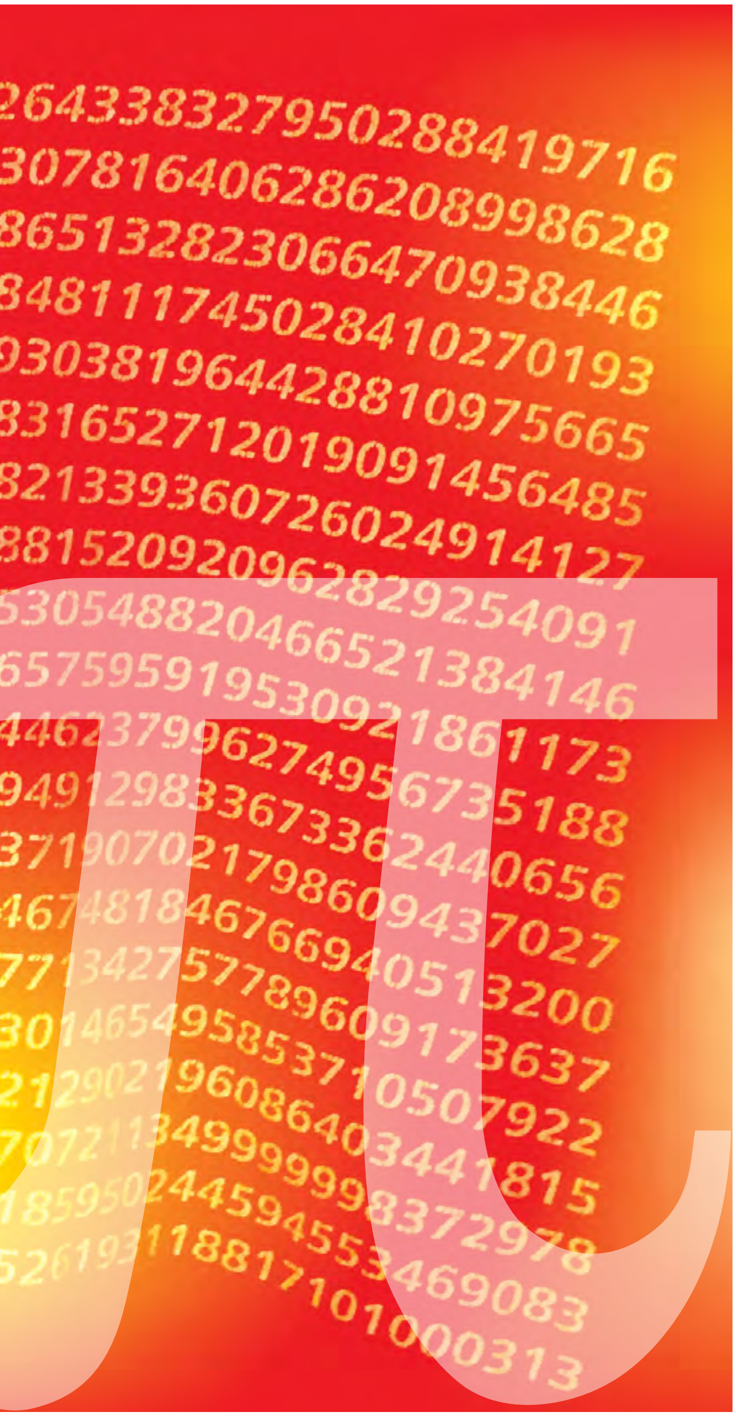
Image 1 : 860 premières décimales de π

1 **p5Visuel** est un logiciel libre et gratuit disponible à l'adresse suivante http://profmath.uqam.ca/~boileau/p5VisuelWEB/index.html
p5Visuel a déjà fait l'objet d'un article dans le numéro 178 de la revue Envol.
Dans la version web de l'article, tous les liens web de l'article seront actifs.
Faire **contrôle+clic** (sur Windows ou Linux) ou **commande+clic** (sur Macintosh) pour ouvrir le lien dans une nouvelle fenêtre.

2 Voir Wikipédia https://fr.wikipedia.org/wiki/William_Shanks_(math%C3%A9maticien)

3 Voir, par exemple,
https://www.piday.org/million/,
http://www.eveandersson.com/pi/digits/1000000
et http://www.math.com/tables/constants/pi.htm.

ec p5Visuel[1]…
ur calculer le nombre π



Mais tout ceci fait peut-être appel à des mathématiques (et des techniques informatiques) complexes, en tout cas trop compliquées pour un élève de niveau secondaire. Vous préférez peut-être faire mesurer la circonférence et le diamètre de plusieurs objets circulaires, puis faire la moyenne des rapports

$$\frac{\textit{cironférence}}{\textit{diamètre}}\ ;$$

avec un peu de chance, vous obtenez ainsi une approximation de π avec une ou deux décimales exactes. Ou, si vous avez l'esprit un peu plus théorique, vous pouvez vous référer à la figure suivante :

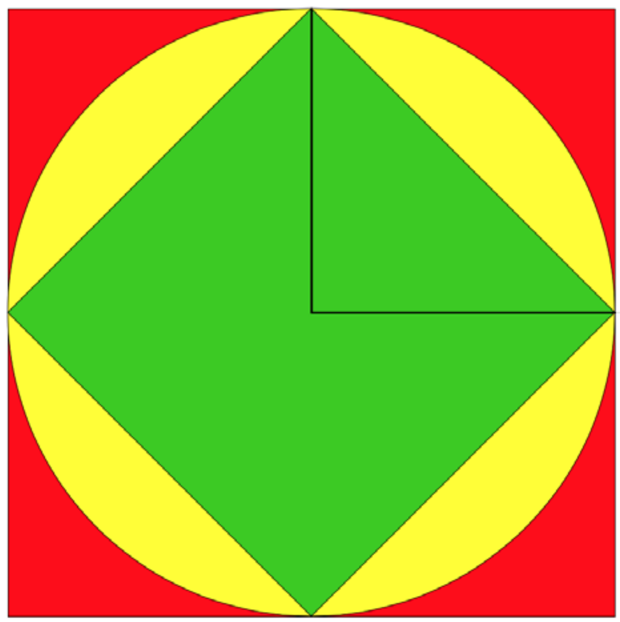


Image 2 : Approximation de l'aire du cercle jaune

et conclure que, pour un cercle de rayon r, on a :

AIRE (CARRÉ VERT INSCRIT) < AIRE (CERCLE JAUNE) < AIRE (CARRÉ ROUGE CIRCONSCRIT)

puis, en utilisant le théorème de Pythagore,

$$(\sqrt{2}r)^2 < \pi(r)^2 < (2r)^2$$

et donc

$$2 < \pi < 4,$$

ce qui est une approximation très imprécise de π. Existe-t-il une façon accessible à nos élèves qui puisse nous donner une bonne approximation de π, disons 3,1416 ? La réponse est *oui*, mais on doit faire appel à la programmation.

Programmer avec p5V

... pour calculer

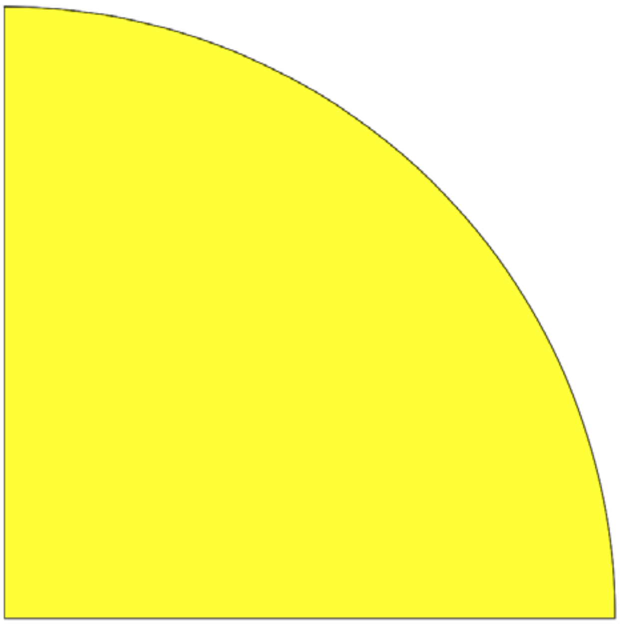


Image 3A

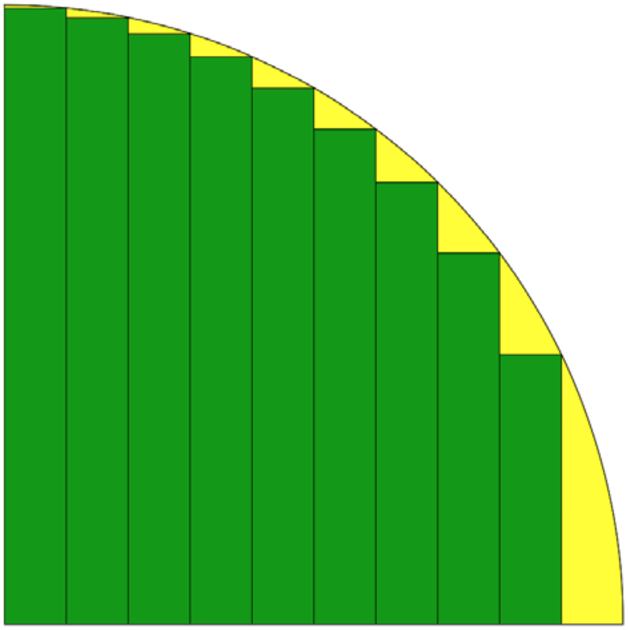


Image 3B

Voyons comment on va procéder : on va chercher à approximer l'aire d'un quart de cercle de rayon 1, qui est de $\frac{\pi}{4}$ (**image 3A**). On va tout d'abord approcher cette aire en utilisant des rectangles verts **contenus** dans le quart de cercle en question (**image 3B**). On aura donc

$$\text{AIRE DE TOUS LES RECTANGLES VERTS} < \frac{\pi}{4}$$

Puis on va approcher cette aire en utilisant des rectangles rouges **contenant** le quart de cercle en question (**image 3C**). On aura donc

$$\frac{\pi}{4} < \text{AIRE DE TOUS LES RECTANGLES ROUGES}$$

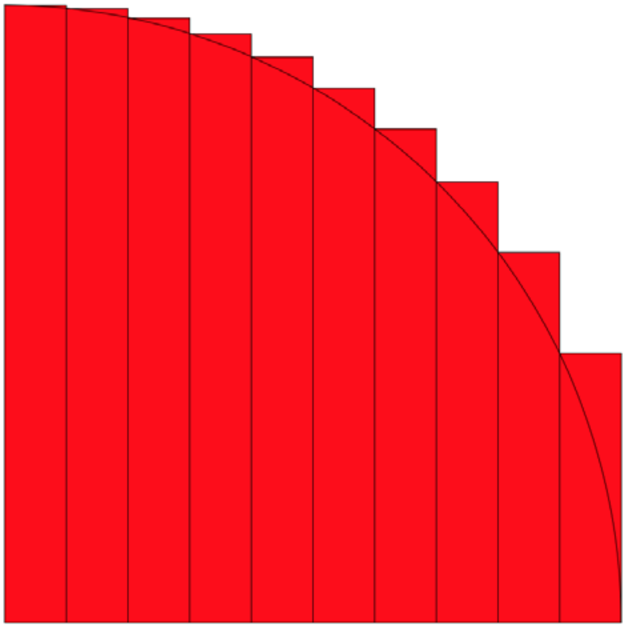
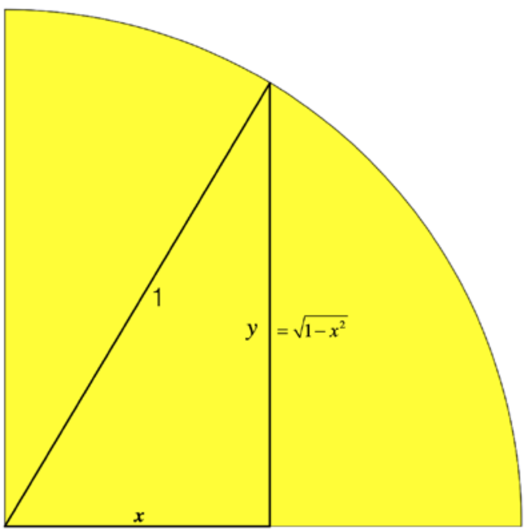


Image 3C

Si on utilise n rectangles (où n = 10 dans le cas illustré ci-contre),



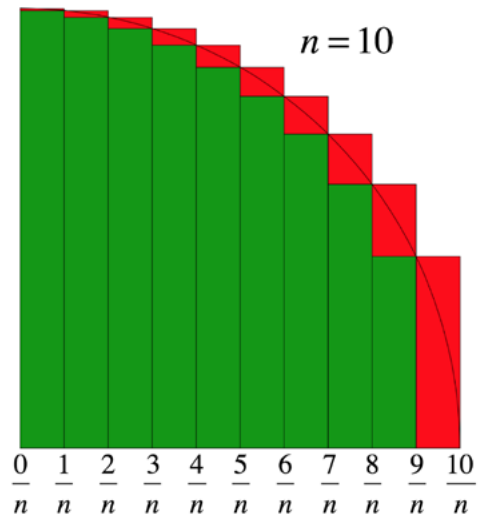


Image 4 : Calcul des hauteurs des rectangles

alors chacun des rectangles (verts ou rouge) aura une base mesurant $\frac{1}{n}$. Et on pourra utiliser le théorème de Pythagore (**Image 4** à gauche ci-dessus) pour calculer les hauteurs :

Dans le cas des rectangles verts, le x dans l'**Image 4** correspondra au côté droit de chaque rectangle, et on aura

Tableau 1 : Aire des rectangles verts

Rectangle	x	y	Aire du rectangle
1	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$
2	$\frac{2}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}$
…	…	…	…
k	$\frac{k}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$
…	…	…	…
n-1	$\frac{n-1}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$
n	$\frac{n}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}$

Programmer avec p5V

... pour calculer

(Notons en passant que, pour le n-ième rectangle vert, la hauteur (et donc l'aire) est nulle.

Voyons maintenant comment on peut obtenir l'aire de tous les rectangles verts dans p5Visuel, qui est un environnement éducatif de programmation par blocs :

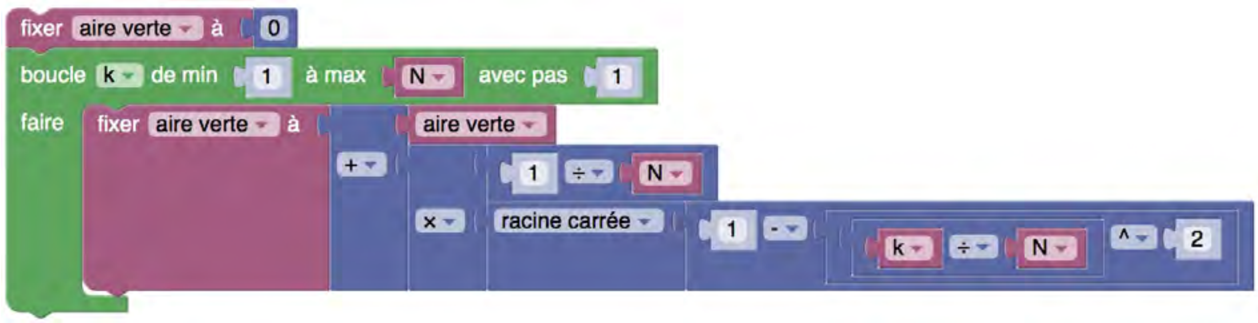


Image 5 : Programmation de l'aire des rectangles verts

C'est la variable « aire verte » qui va contenir l'aire totale de tous les rectangles verts. On donne initialement à cette variable la valeur de 0. Puis, à l'aide d'une boucle indexée par la variable « k », on ajoute successivement à cette variable « aire verte »

- d'abord l'aire du rectangle 1 (où $k = 1$)
- puis l'aire du rectangle 2 (où $k = 2$)

...

- puis l'aire du rectangle n -1 (où $k = n$ -1)
- enfin l'aire du rectangle n (où $k = n$).

Ainsi, à la fin de la boucle, la variable « aire verte » contiendra bien l'aire des n rectangles verts.

Dans le cas des rectangles rouges, le x dans l'**Image 4** correspondra au côté gauche de chaque rectangle, et on aura

Tableau 2 : Aire des rectangles rouges

Rectangle	x	y	Aire du rectangle
1	$\frac{0}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}$
2	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$
...	...	...	...
k	$\frac{k-1}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$
...	...	...	...
$n-1$	$\frac{n-2}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}$
n	$\frac{n-1}{n}$	$\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$	$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

Notons en passant que, pour le premier rectangle rouge, la hauteur est 1 et l'aire est $\frac{1}{n}$.

Pour obtenir l'aire de tous les rectangles rouges, on va procéder comme pour les rectangles verts, mais en utilisant les formules d'aires spécifiques aux rectangles rouges :

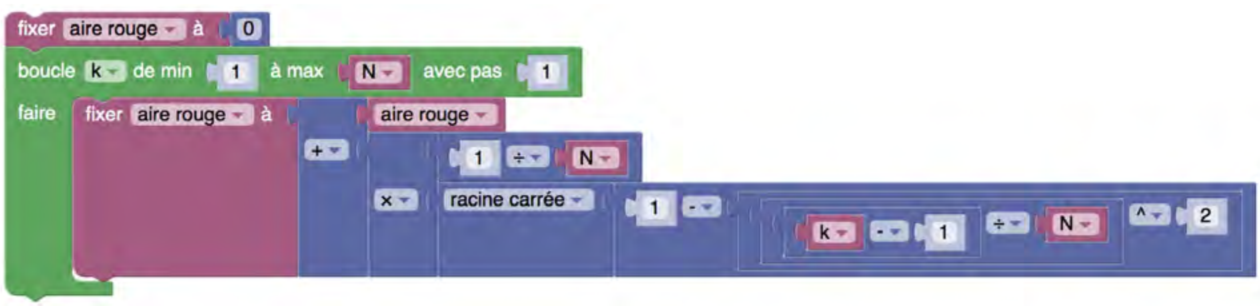


Image 6 : Programmation de l'aire des rectangles rouges

Voyons maintenant comment ajouter des éléments d'interface à notre programme.

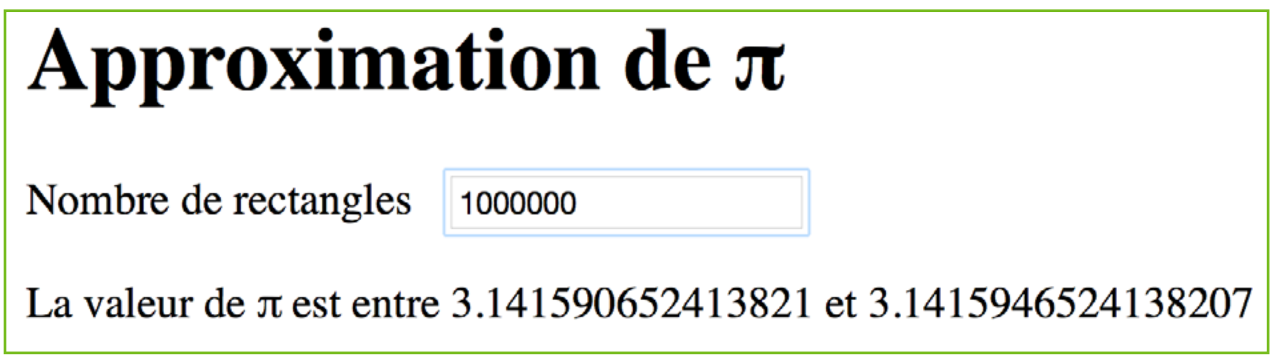


Image 7 : Éléments d'interface

Il suffira de prévoir trois éléments :

- un titre (qui restera le même tout au long du programme)
- une entrée, où l'utilisateur pourra spécifier le nombre de rectangles à utiliser
- un paragraphe contenant le résultat des calculs du programme.

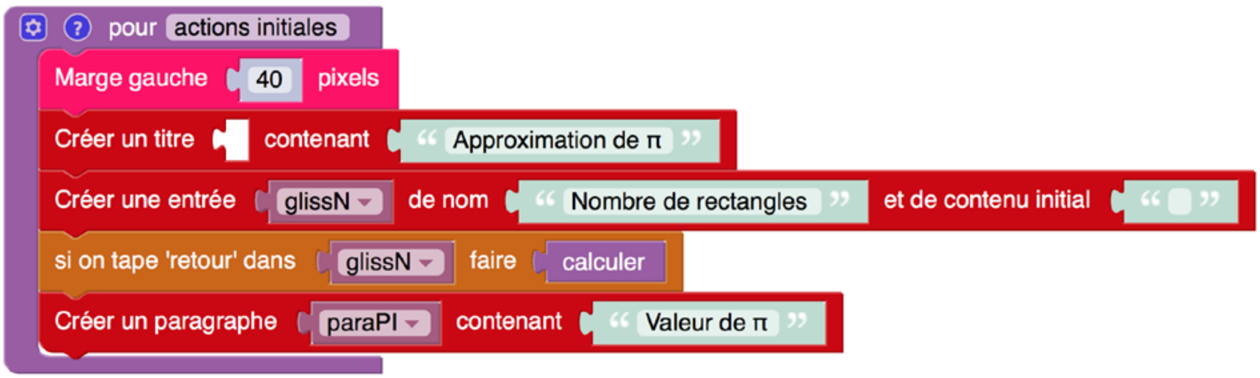
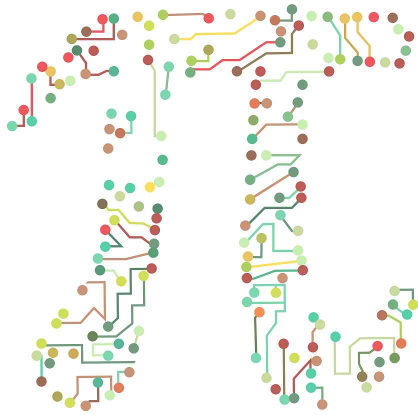


Image 8 : Programmation d'éléments d'interface

Même si ce n'était pas nécessaire, on a ajouté une marge à notre page web, pour améliorer la disposition du tout dans notre page web. Mais on a dû spécifier quelle action de l'utilisateur déclenchera le calcul par le programme. On aurait pu choisir un clic sur un bouton (qu'il aurait fallu définir), mais on a préféré lui demander d'appuyer sur la touche « retour » quand il aura fini d'entrer le nombre de rectangles : à ce signal, la fonction « calculer » sera exécutée. Avant d'effectuer les calculs décrits ci-dessus, cette fonction va d'abord chercher le nombre de rectangles spécifié par l'utilisateur et place celui-ci dans la variable « N ». Puis, après avoir effectué ces calculs, la fonction en affiche le résultat dans le paragraphe conçu à cet effet. Ce résultat est obtenu en mettant bout à bout les éléments suivants :

- le texte « La valeur de π est entre » (qui comporte un espace à la fin)
- le nombre obtenu en multipliant par 4 la valeur de la variable « aire verte »
- le texte « et » (qui comporte un espace au début et un espace à la fin)
- le nombre obtenu en multipliant par 4 la valeur de la variable « aire rouge »



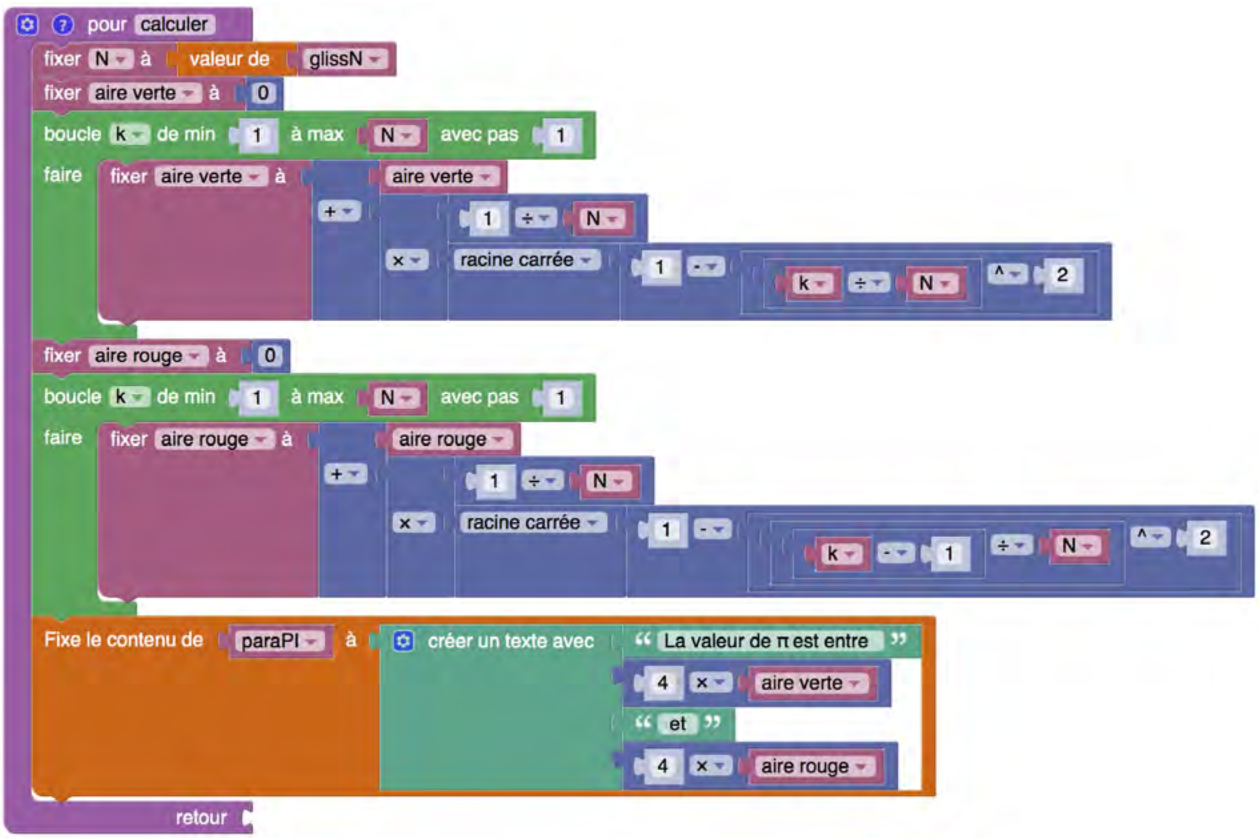


IMAGE 9 : Programme complet

Notez comme ce programme[4] est à la fois simple et puissant. Simple, car il repose sur des éléments mathématiques élémentaires (le théorème de Pythagore et l'utilisation de rectangles pour approximer l'aire[5] du quart de cercle) et sur des outils informatiques accessibles (une boucle pour effectuer une somme). Mais aussi puissant, car on peut lui demander de faire le calcul pour un grand nombre de rectangles (un million dans l'exemple de l'**IMAGE 7**) pour obtenir plus de précision (5 décimales dans ce cas).

Ce programme a aussi ses limites : si on lui donne un nombre de rectangles trop élevé, le temps requis deviendra prohibitif et la précision des calculs (à 16 chiffres) pourra s'avérer insuffisante. Mais on a atteint notre objectif initial : calculer une valeur approchée de **π** avec un nombre suffisant de décimales (pour le contexte scolaire) et en n'utilisant que des méthodes élémentaires[6] : il « suffit » d'utiliser 100 000 rectangles pour obtenir

La valeur de π est entre 3.1415… et 3.1416…

4 Vous trouverez le programme complet en suivant le lien suivant http://profmath.uqam.ca/~boileau/Nouvelles/Fichiers/Envol2021a/calculer

5 Cette façon d'approximer l'aire par une suite de rectangles servira de base à la définition de l'intégrale, une fois rendu au CÉGEP.

6 Ajoutons que ce programme peut être rendu plus rapide si on l'enregistre dans une page web avant de l'exécuter (voir http://profmath.uqam.ca/~boileau/Nouvelles/Fichiers/Envol2021a/calculerPlus.html.) Vous pourrez aussi consulter une version enrichie de ce programme à l'adresse suivante http://profmath.uqam.ca/~boileau/Nouvelles/Fichiers/Envol2021a/calculerPlus

2810, 26E RUE,
ST-PROSPER, QUÉBEC G0M 1Y0
NO PERMIS : 40043512

GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HEM4TIQUE AU SEC0ND4IRE

PRINTEMPS-ÉTÉ 2022