MATHÉMATIQUES AN 2000

UN APERÇU DE LA RECHERCHE
À L'OCCASION DE L'ANNÉE MATHÉMATIQUE MONDIALE

Les mathématiques en Occident, de l'an mil à l'an 2000

LOUIS CHARBONNEAU
ET JACQUES LEFEBVRE

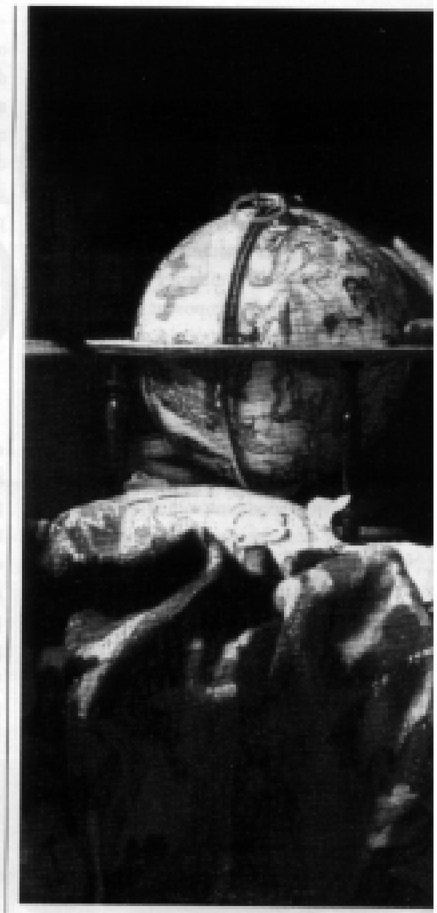
Le millénaire qui se termine a vu la montée puis la prépondérance de l'Occident, où s'est développée une civilisation qui aujourd'hui domine le monde, du fait de sa puissance politique et militaire, mais surtout grâce à son habileté à infléchir les forces de la nature au profit de l'humain. Les mathématiques ont joué un rôle important dans cette quête pour apprivoiser la nature. Complètement marginales en Occident il y a mille ans, elles sont maintenant omniprésentes et interviennent pour ainsi dire dans toutes nos activités.

En l'an mil, l'Occident chrétien se cherche encore. Les villes ne sont plus que le souvenir de ce qu'elles ont été au début du premier millénaire. Les routes sont dangereuses, l'arbitraire et la force règnent un peu partout. Le savoir est concentré dans quelques monastères, dont un des rôles consiste à sauvegarder une partie de l'héritage du monde antique. Toutefois, ailleurs à la même époque, de grandes civilisations prospèrent. Le monde arabe est à son zénith. Ses bateaux sillonnent la Méditerranée, ses caravanes partent vers les Indes et la Chine raffinée des Song (960-1279). À Bagdad comme à Cordoue, probablement la plus grande ville du monde alors, l'activité intellectuelle se nourrit de l'héritage grec, babylonien et indien. Aux yeux des Arabes, les Européens font figure de barbares.

Peu à peu, au cours du millénaire, cette situation évolue. Les Croisades (1095-1291) ouvrent l'Europe au reste du monde et lancent un mouvement intellectuel profond qui s'incarne dans la création des universités, principalement aux XIII^e et XIV^e siècles. L'Europe, plus au fait des connaissances antiques, commence à développer une personnalité propre. La Renaissance, les guerres de religion au XVI^e siècle, les guerres nationales à partir du XVII^e siècle, puis la révolution scientifique du XVII^e siècle et l'expansion de la colonisation, ainsi que la révolution industrielle (fin du XVIII^e et XIX^e siècle) marquent la seconde moitié du millénaire.

Signalons quatre moments marquants de l'histoire des mathématiques au cours de ce millénaire. D'abord, au tournant du XVII^e siècle, il y a la mise au point de l'algèbre symbolique, puis l'invention du calcul différentiel et intégral à la fin du même siècle. Au XIX^e siècle, les probabilités et les statistiques prennent un formidable essor. Le XX^e siècle, lui, verra naître l'informatique.

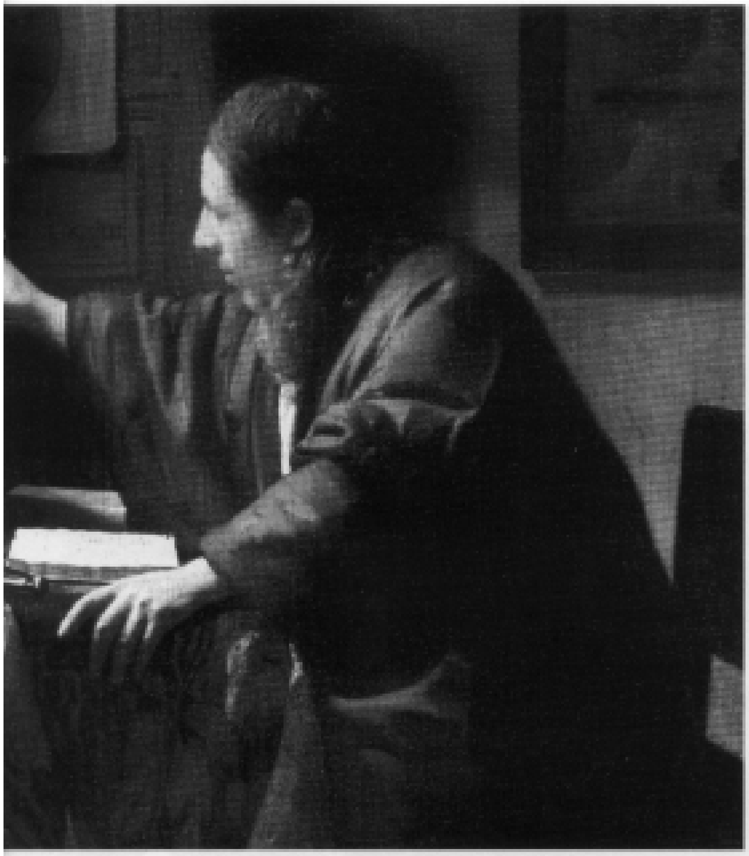
La place prise par les mathématiques et les sciences dans la civilisation occidentale fait de celle-ci un cas unique dans l'histoire de l'humanité. Pour en arriver là, l'Occident est passé par un lent mais profond bouleversement de la vision que les humains ont des relations



L'astronome, Johannes Vermeer, Musée du Louvre

entre le monde réel et l'activité intellectuelle. La période de 1250 à 1350, postérieure aux Croisades, semble une période critique[1]. À cette époque, le mouvement d'urbanisation amène la construction des grandes cathédrales gothiques. Les horloges mécaniques commencent à cadencer la vie urbaine, à partir des années 1270. La poudre à canon, en provenance de l'Orient, change la donne des stratèges et des constructeurs de fortifications. La boussole fait aussi son entrée en Occident. Elle suscite le développement de cartes,

1. Les considérations des deux prochains paragraphes s'inspirent de CROSBY, A.W., *The Measure of Reality. Quantification and Western Society. 1250-1600*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.



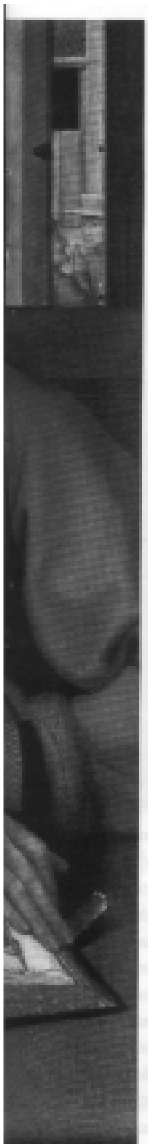
dites *Portolani*, avec lesquelles les navigateurs peuvent, pour les mers intérieures, déterminer leur route en traçant des droites sur la carte correspondant à la direction que doit prendre leur bateau pour atteindre un port donné. La perspective, encore intuitive chez le peintre et architecte italien Giotto, modifie peu à peu les modes de représentations bidimensionnelles de l'espace. La musique polyphonique se codifie et est transmise par une écriture musicale de plus en plus précise et efficace. Enfin, le développement du commerce, à l'intérieur de l'Europe comme vers d'autres continents, provoque un changement radical de la comptabilité des entreprises commerciales, qui adoptent les règles de la comptabilité à double entrée, comptabilité dans laquelle sont mises en regard les entrées du passif et de l'actif, avec, régulièrement, une opération de « balancement » permettant de saisir l'état.

Tous ces événements ont en commun l'émergence de représentations nouvelles, qui concentrent l'information. D'un seul regard, en silence, on peut maintenant saisir la structure d'une pièce musicale, la trajectoire à suivre pour atteindre un port donné, l'état financier d'une entreprise. Ces représentations posent de nombreux défis et de nouvelles problématiques s'élaborent peu à peu. Par exemple, les compositeurs de polyphonies développent des pièces musicales très complexes qui prennent leur sens principalement par les relations entre les éléments d'écriture musicale mis en présence. L'expert en musique devient alors celui qui pousse les possibilités au bout de ce que permet la représentation de la musique. Pensons à la fugue, encore à venir, dont la beauté ne réside pas seulement sur le plan auditif, puisqu'elle peut être perçue aussi à l'examen, même sommaire, de la partition.

Ces types de représentations, qui aujourd'hui nous semblent si naturelles et si élémentaires, reposent en bonne partie, phénomène alors nouveau, sur des manipulations d'unités de mesure. Mesure du temps (par exemple, les heures de durée uniforme, quel que soit le jour et à n'importe quel moment du jour, ou encore, la notion d'un temps en musique). Mesure de l'espace (nouvelles unités de mesure de distance qui n'impliquent plus la durée du trajet). Mesure de la richesse (la monnaie et une comptabilité qui permet de saisir la santé financière d'une entreprise). Le nombre devient un outil commun, non seulement au dénombrement d'objets, mais aussi au traitement de choses aussi évanescentes que le temps et l'espace. Ainsi se développe l'impression que la quantification peut s'étendre à plusieurs domaines et qu'elle est porteuse de révélations nouvelles.

Le commerce s'accentue, les marchands s'enrichissent et envoient leurs fils dans des écoles qui bourgeonnent ici et là dans les villes d'Italie. L'expert en arithmétique chez les marchands est celui qui résout des problèmes présentant des difficultés en regard des modes de représentation. Les très nombreuses règles de résolution, que devait connaître un tel expert auparavant, sont synthétisées en quelques méthodes de manipulation d'inconnues. La nouvelle problématique commence alors à s'exprimer en termes symboliques. C'est là que naît notre algèbre. La représentation symbolique des problèmes s'accentue à mesure qu'on avance dans le XVI[e] siècle. Ces avancées, majeures sur le plan mathématique, servent encore rarement à résoudre des problèmes réels. Mais par rapport aux mathématiques grecques, développées dans un contexte intellectuel essentiellement platonicien, l'algèbre prend racine dans un domaine terre à terre, le commerce.

Mais cette algèbre, tout comme la géométrie euclidienne, étudie des objets idéaux, statiques, dans lesquels la notion de temps n'intervient pas. En établissant un pont entre algèbre et géométrie, la géométrie analytique, nouveau mode de représentation, accentue considérablement la place du temps en mathématiques, avec ses courbes perçues comme la trace d'un point en mouvement. Ces avancées tombent... à point nommé ! À la Renaissance, puis au XVII[e] siècle, dans un contexte où l'espace astronomique devient infini et isotrope, où les explorateurs sillonnent les océans, où l'on aimerait pouvoir prévoir le lieu de chute des boulets de canons, la nécessité de se représenter adéquatement le mouvement et de le quantifier débouche sur l'invention du calcul différentiel et intégral. Le rapport de ce nouveau mode de calcul avec les problèmes concrets à la source de son développement est étroit. Certes, des problèmes non réalistes, mais intellectuellement intéressants, sont proposés par nombre de mathématiciens, mais pour d'autres, comme



Le prêteur et sa femme, Quentin Metsys, Musée du Louvre

Newton, la motivation prend directement sa source dans la physique, la mécanique, et s'ancre donc plus intimement dans le concret que l'algèbre ne le fit à son origine.

La naissance d'une théorie un tant soit peu substantielle des probabilités a lieu vers 1660. Mais celles-ci ne portent alors, et pour assez longtemps, que sur des jeux de hasard (cartes, dés...) aisément mathématisables. Les statistiques, elles, consistent surtout en des collections de données, par exemple les naissances et décès annuels à Londres. On essaie bien, au XVIII^e siècle, d'appliquer les probabilités à des phénomènes sociaux comme les modes de scrutin, ou de recueillir, pour l'État, des informations sur de plus en plus de phénomènes. Mais ce n'est qu'aux XIX^e et XX^e siècles que probabilités et statistiques se développent vraiment et, en partie, s'unissent.

La constatation qu'une réalité comme la position d'une planète ou d'une étoile puisse donner lieu à des mesures différentes d'une observation à une autre est l'occasion de l'élaboration, vers 1800, de la loi des erreurs. Cette loi détermine la forme limite commune à de nombreux phénomènes numériques aléatoires: c'est la distribution dite normale, ou de Gauss, ou de Laplace, ou... Cette loi est progressivement généralisée et est maintenant connue sous le nom de « théorème central limite »: la somme d'un grand nombre de variables aléatoires tend vers la normale, sous des conditions assez larges. On essaie de l'appliquer aux taux de criminalité, aux jugements en matière criminelle ou civile, etc. L'essentiel des idées relatives à l'estimation de paramètres et aux tests d'hypothèses est déjà présent. Une autre approche pour développer une physique sociale recourt plus à des statistiques descriptives (tableaux, graphiques, moyennes, etc.) qu'à un traitement probabiliste serré. Ces représentations statistiques sont peu à peu normalisées à partir de 1850, grâce à des congrès tenus en Europe. Plusieurs en viennent de plus à considérer l'étude des variations et, en particulier, des cas extrêmes (cancres, surdoués) comme aussi, sinon plus, importante que la convergence vers la moyenne. Ces divers traitements numériques de phénomènes humains ou sociaux rencontrent, bien sûr, de solides résistances, souvent d'ordre idéologique: que veut-on dire par homme moyen ? Comment concilier la liberté individuelle et ce déterminisme social des grands nombres ? Sur le plan technique, l'abondance des données à traiter favorise, puis impose, le développement de puissantes machines à compter et à calculer. De l'arithmomètre de Thomas en 1823 jusqu'à la machine mécanographique (à cartes perforées) de Hollerith en 1889, le terrain se prépare pour l'arrivée de l'ordinateur au milieu du XX^e siècle.

À partir de 1900 environ, un lien plus étroit s'établit entre la collecte et la représentation des données empiriques, et un traitement probabiliste rigoureux: la statistique mathématique est née. Parmi les méthodes nouvelles, on voit apparaître l'analyse de la variance, les schémas expérimentaux et le bon usage de petits échantillons. Les applications statistiques se multiplient et se raffinent dans les sciences sociales (démographie, criminologie), en économie, en médecine... Les sciences physiques ne restent pas à l'écart des approches probabilistes ou statistiques, comme le montrent, par exemple, le développement de la théorie statistique de la cinétique des gaz pendant la seconde moitié du XIX^e siècle, puis celui de la mécanique quantique au XX^e siècle.

Épistémologiquement, le déterminisme causal strict a ainsi, depuis trois siècles, cédé beaucoup de place aux corrélations statistiques et aux modèles probabilistes.

Mathématiques, sciences et société ont, au cours du millénaire, multiplié les liens qui aujourd'hui, en Occident comme ailleurs, les unissent étroitement, parfois de façon presque invisible. Sans les divers modes de représentation inventés au Moyen Âge et à la Renaissance, il n'y aurait sans doute pas eu de symbolisme algébrique. Or sans algèbre, pas de géométrie analytique, donc pas de calcul différentiel et intégral, donc... pas de mathématiques telles que nous les connaissons. Mais aussi pas de sciences telles qu'elles se font aujourd'hui ni leurs effets, techniques et autres, sur la société. ▲

POUR EN SAVOIR PLUS

CROSBY, A. W., *The Measure of Reality. Quantification and Western Society, 1250-1600*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997, xii-245 pages.

DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J., *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, coll. « Points-Sciences », Paris, Éditions du Seuil, 1986 (1ère éd. 1982), 314 pages.

DAVIS, P. J., HERSH, R., *Descartes' Dream. The World According to Mathematics*, New York, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1986, xviii-321 pages.

Éléments d'histoire des sciences, sous la direction de Michel SERRES, coll. « IN EXTENSO », Paris, Larousse, 1997.

KLINE, Morris, *Mathematics in Western Culture*, New York, Oxford University Press, 1961 (1ère éd. 1953), 484 pages.

STIGLER, S. M., *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge (Mass.), London, The Belknap Press of Harvard University Press, 1986, xvii-410 pages.