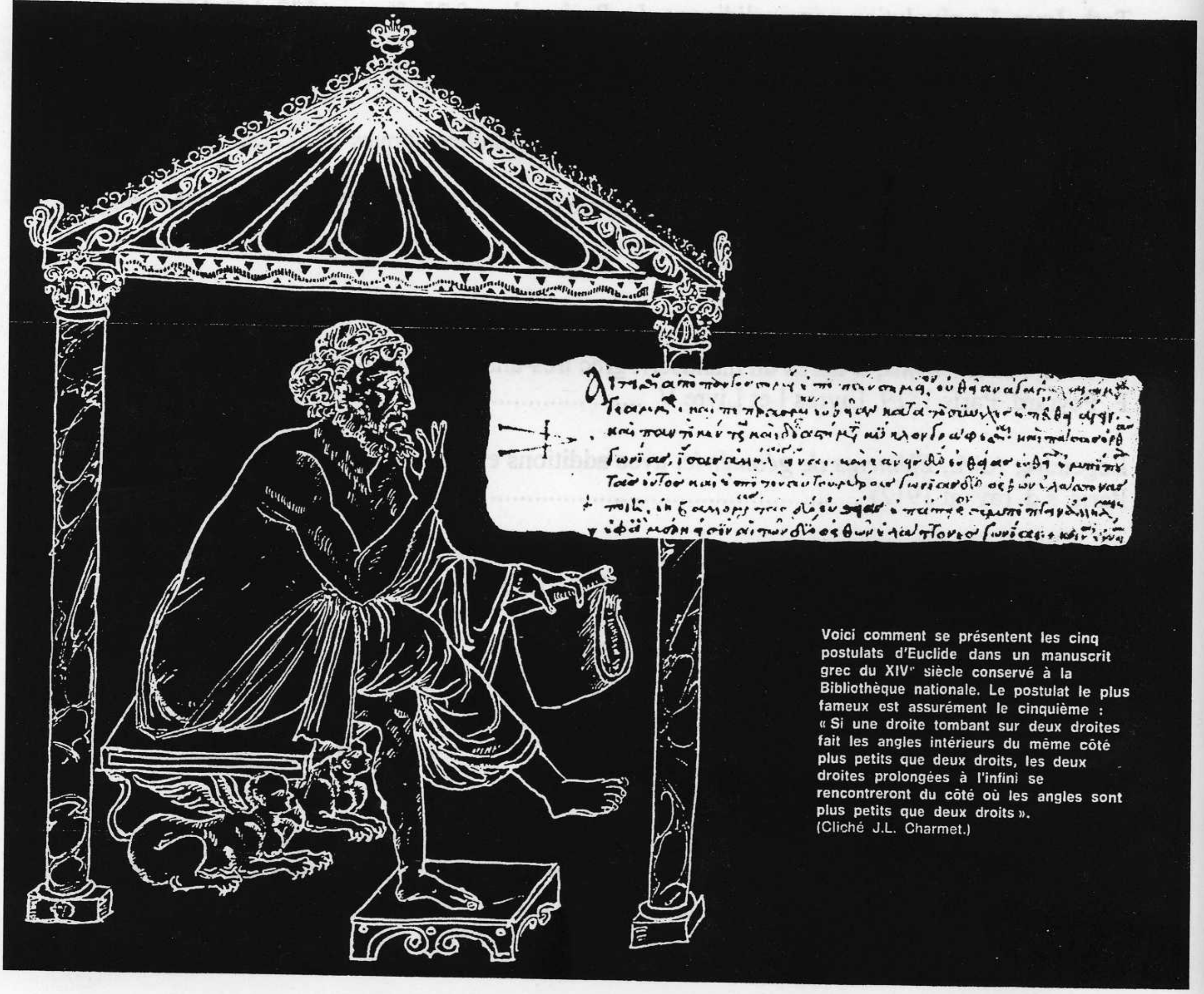
La révolution non euclidienne

par Imre Toth



Voici comment se présentent les cinq postulats d'Euclide dans un manuscrit grec du XIV[e] siècle conservé à la Bibliothèque nationale. Le postulat le plus fameux est assurément le cinquième : « Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits ». (Cliché J.L. Charmet.)

■ Pour les mathématiciens d'aujourd'hui, les géométries non euclidiennes sont devenues un sujet orthodoxe et relativement banal. Mais, jusqu'au début du XX[e] siècle, beaucoup de mathématiciens réputés et beaucoup de philosophes ont fait preuve d'une résistance tenace.

■ Avec le recul, nombre d'historiens en sont venus à croire que seuls des esprits incompétents et bornés avaient pu opposer un tel refus aux idées de Gauss, de Bolyai et de Lobatchevski. Imre Toth montre qu'il n'en a rien été. C'est que les vraies difficultés, finalement, n'étaient pas d'ordre strictement logico-mathématique ; il fallait surtout reconnaître, grâce à une démarche philosophique hardie, que les nouvelles géométries avaient la même « vérité », le même « droit à l'existence » que la géométrie classique.

Ce portrait (à gauche), tiré d'un manuscrit latin du VI[e] siècle concernant l'arpentage, est certainement la copie d'un document beaucoup plus ancien et représente sans doute Euclide. Les Eléments que ce dernier nous a laissés datent de la fin du IV[e] siècle ou du début du III[e] siècle avant J.C. ; ils constituent une synthèse des connaissances mathématiques de l'époque. C'est à Euclide qu'on doit l'introduction d'un axiome qui ne figurait pas chez ses prédécesseurs et qui est connu sous le nom de « postulat euclidien des parallèles ». L'histoire de cet axiome et de ses avatars constitue un long et important chapitre de l'histoire des mathématiques. (Herzog August-Bibliothek, Wolfenbüttel.)

A

Des théorèmes non euclidiens ont été formulés bien avant que les géométries non euclidiennes aient été reconnues comme « vraies ».

Imre Toth, a enseigné dans les universités de Bucarest, de Francfort et de Bochum. Actuellement, il est professeur à l'université de Ratisbonne (RFA). Ses recherches portent essentiellement sur les mathématiques grecques et sur les problèmes philosophiques liés aux fondements des mathématiques.

■ On parle, à propos de la géométrie non euclidienne d'une révolution scientifique ; et c'est sans doute correct, même si la signification du terme « révolution » demande à être clarifiée. Mais si l'on attribue l'apparition de la nouvelle géométrie à un acte de *découverte*, c'est certainement faux.

Un monde connu, mais sans existence reconnue.

Car il n'existait nulle part, avant 1824, un anti-monde géométrique caché, n'attendant que l'arrivée de son Christophe Colomb pour être découvert. Pourtant, après 1825, voilà qu'il était subitement là et qu'il existait au sens où l'on dit que l'univers spatial associé à la géométrie euclidienne existe. Il me semble donc que le mot *création* conviendrait mieux pour désigner l'acte historique de la constitution de la nouvelle géométrie, sous le double aspect de systèmes d'axiomes vrais et d'univers d'objets géométriques réels (le sens attribué ici au mot *création* sera précisé plus bas).

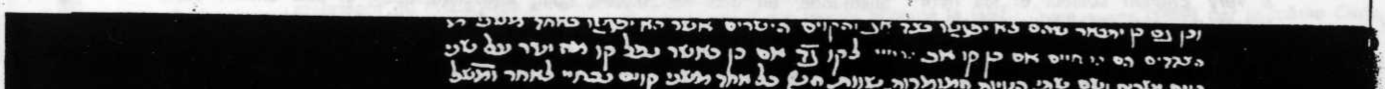
C'est seulement après avoir été ainsi créée que la géométrie non euclidienne (ou GNE) a pu devenir objet d'une découverte proprement dite. Mais si la création a été le résultat d'un acte instantané, sa découverte n'a eu lieu que quarante-cinq ans après sa création, entre 1870 et 1880. A ce moment-là, la révolution encapsulée dans la théorie dès sa création a éclaté. Dans le cas normal (par exemple découverte d'un insecte, d'un continent, d'une étoile), la découverte consiste dans la reconnaissance instantanée de l'existence de l'objet en question. L'identification de sa structure et l'examen détaillé de ses propriétés viennent ensuite. Mais la découverte, dans le cas de la GNE, s'identifie avec le processus qui a assuré sa réception et son intégration dans l'édifice des sciences mathématiques.

Or ce processus de reconnaissance a pris beaucoup de temps. De nombreux géomètres avaient déjà démontré des théorèmes non euclidiens et donc pris connaissance de la structure et des propriétés du futur espace non euclidien. Mais, quoique connue, la GNE n'était pas reconnue. Philosophes et mathématiciens considéraient que l'espace non euclidien était une pure impossibilité et n'accordaient ni vérité ni réalité à la GNE. En ce sens, on peut dire que la connaissance de l'espace non euclidien a précédé son existence.

La géométrie non euclidienne n'a pas été refusée seulement par des ignorants.

Selon la tradition anecdotique, ceux qui refusaient d'accepter la GNE à la fin du XIX^{e} siècle apparaissent surtout comme des philosophes ignorants en mathématiques, ou bien comme des mathématiciens sclérosés, incapables de suivre l'œuvre de la jeune génération. Historiquement, cette interprétation n'est pas exacte.

Certes, il se trouvait parmi les adversaires de la GNE de véritables ignorants. C'était le cas du philosophe matérialiste et révolutionnaire russe N.G. Tchernychevski, qui, en 1878, ne voyait dans la GNE que *les élucubrations sauvages d'un ignorant, un galimatias stupide, un non-sens idiot,* un



Le problème des parallèles a été étudié par les Grecs, puis par les Arabes (Alhazen, Omar Khayyam, Nasreddin). Il a été introduit dans la pensée occidentale du Moyen Age par Lévi ben Gershom (1288-1344), qu'on appelle aussi Léon de Bagnols. Cet éminent représentant de la pensée juive médiévale s'occupait de philosophie et de théologie, mais aussi de médecine, d'astronomie et de mathématiques. Son étude d'Euclide se situait entre autres dans une tradition théologique remontant à Maïmonide et à saint Thomas d'Aquin, qui avaient soulevé la question : est-ce que la structure euclidienne imposée par Dieu à notre monde doit être considérée comme une nécessité limitant la liberté divine ? Ces préoccupations philosophico-théologiques joueront aussi un rôle dans le regain d'intérêt que connaîtra le problème des parallèles à la fin du XVIII^{e} siècle, surtout en Allemagne.

savoir d'imbécile. C'était aussi le cas du philosophe idéaliste allemand Lotze, pour lequel la GNE n'était qu'un *paradoxe futile, une grimace de la science, un jeu logique gratuit* (1879). Mais si l'on réexamine l'ensemble des œuvres publiées contre la GNE, on s'aperçoit que ses adversaires, dans leur majorité, avaient les moyens techniques de comprendre la nouvelle théorie.

Ainsi J. Delbœuf, professeur à l'université de Liège, membre de l'Académie de Bruxelles, est probablement le premier à avoir remarqué dès 1859 la nouvelle géométrie, à l'avoir examinée avec un très grand sérieux et à avoir essayé d'attirer sur elle l'attention publique. Il rejetait pourtant la GNE ; son attitude est restée la même trente ans plus tard, lorsqu'il publia son dernier livre (chez Hermann, à Paris, en 1897), à une époque où la majorité des mathématiciens était déjà favorable à la GNE. On pourrait faire des remarques analogues au sujet de Pierre Issaly, aujourd'hui complètement oublié. En Angleterre, le célèbre logicien Augustus de Morgan considérait la géométrie classique comme *a very English subject* et *les hérétiques de cette orthodoxie comme se situant à l'extrême de toute hérésie.* « Je sais, disait en 1869 le mathématicien anglais J.J. Sylvester, qu'il y a des gens qui considèrent Euclide comme un avant-poste de la constitution britannique. » Ch. L. Dodgson, très peu connu comme professeur de mathématiques à l'université de Cambridge et comme auteur d'un ouvrage sur *Euclid and his modern rivals* (1879), mais célèbre sous le nom de Lewis Carroll, refusait obstinément non seulement la GNE mais toute réforme mineure de la géométrie euclidienne. Il est étonnant de voir combien l'auteur d'*Alice* et de la *Chasse au snark* a pu manquer de sensibilité à l'égard de la poésie « absurde » propre à l'espace géométrique.

Même parmi les philosophes, les adversaires les plus actifs ne peuvent pas être accusés d'ignorance mathématique. Ainsi l'épistémologue américain J.B. Stallo (1823-1900) publia en 1881 un livre sur les *Concepts et théories de la physique moderne* qui fit l'objet de nombreux comptes rendus qui se partageaient entre l'éloge et la critique. Cet ouvrage, qui a été traduit en français, en allemand et en plusieurs autres langues, a eu des effets considérables. Stallo se proposait de purifier la science de tout élément métaphysique. Avec la théorie des atomes, la GNE est devenue sa cible principale. Il la repoussait en lui donnant le nom péjoratif de *géométrie transcendantale* ; c'était selon lui un produit métaphysique nuisible. Pourtant la compétence technique et la vaste information de Stallo sont indiscutables. En France, c'est Charles Renouvier qui s'est proposé d'expurger la science des élucubrations métaphysiques de la GNE. Paul Tannery, en 1876, mentionne son nom comme celui d'un *philosophe capable de juger la question* du point de vue technique, mais qui reste nettement hostile à la nouvelle géométrie.

Dühring et « les parties dégénérées du cerveau de Gauss »...

A la même époque (1874-1895), Otto Schmitz-Dumont publia en Allemagne une série de travaux très bien documentés où il proposait, lui aussi, d'éliminer la GNE des mathématiques au nom du véritable esprit scientifique. Mais ce sont les attaques fulminantes d'Eugen Dühring contre la GNE, ses fondateurs et ses propagateurs, qui ont accaparé l'attention publique. Bien qu'on puisse dire sans exagération que Dühring a été l'un des personnages les plus exécrables de la scène allemande, on doit reconnaître qu'il possédait une sérieuse culture mathématique. Son athéisme militant, sa critique impétueuse de la philosophie idéaliste (il se donnait pour un adepte d'Auguste Comte) et sa philosophie sociale et politique (il se considérait comme un socialiste non marxiste) ont eu un retentissement très vif dans le public allemand.

Une de ses découvertes (qu'il partage avec d'autres) a consisté à trouver dans la biologie une base scientifique pour la justification de l'antisémitisme. Au lieu de baptiser les Israélites, il pensait qu'il fallait les éliminer biologiquement. Au nom de son idéal positiviste et matérialiste, il proclama aussi la guerre sainte contre la GNE. Voici quelques-unes de ses appréciations : *insanité démentielle, semi-poésie et total non-sens, produit de l'hallucination mathématique, théorèmes et figures mystiques et délirants nés d'une pensée maladive...* Il parlait aussi des *parties dégénérées du cerveau de Gauss* comme du facteur matériel responsable de l'élaboration de la GNE. De tels propos ont naturellement fait scandale dans certains milieux universitaires ; mais, en même temps, ils lui ont apporté une large popularité parmi les étudiants et parmi les ouvriers. C'est justement la réception favorable des idées de Dühring par des socialistes allemands qui a déterminé Engels à écrire un *Anti-Dühring* dans lequel il critiquait le style mécaniste (c'est-à-dire non dialectique) du matérialisme dühringien. Mais, quoiqu'il ait consacré une partie considérable de son livre aux problèmes de la connaissance mathématique, Engels ne trouve aucun mot en faveur de la révolution non euclidienne.

Dühring jouissait d'une certaine considération même dans les milieux scientifiques : Georg Cantor, le fondateur de la théorie des ensembles, le mentionne comme le plus important représentant du positivisme en Allemagne et discute ses conceptions avec une grande attention. Un de ses fameux livres à scandale, *Robert Meier, le Galilée du XIXe siècle,* ne contient pratiquement que des insultes grossières contre Gauss, Helmholtz, Joule, la GNE, les Juifs, les mathématiciens et physiciens allemands. [1] De façon plus strictement académique, son œuvre a été continuée en Allemagne par Hugo Dingler, professeur à l'Ecole polytechnique de Munich et de Darmstadt, bien connu aussi pour son engagement en faveur du national-socialisme. Dingler demandait l'élimination de la théorie de la relativité et de la GNE, qu'il considérait comme des constructions antiscientifiques, et cela encore dans un livre publié peu avant sa mort, en 1955, à Munich. [2] Selon lui, la géométrie doit être fondée sur la *pratique manuelle,* ce qui est certainement impossible dans le cas de la GNE ; la géométrie euclidienne est donc pratiquement la seule géométrie possible.

Les luttes de Lobatchevski et de Bolyai.

En Russie, c'est Ostrogradski, considéré par l'historiographie soviétique courante non seulement comme un des plus grands mathématiciens du XIXe siècle mais aussi comme un savant progressiste, matérialiste et athée, qui s'est fait l'accusateur public de la géométrie de Lobatchevski. Nommé en 1828, à 27 ans, à l'Académie de Saint-Petersbourg, devenu plus tard inspecteur général de l'enseignement mathématique en Russie sous Nicolas Ier, Ostrogradski est devenu l'autorité mathématique suprême de son pays. En 1832 et 1842, dans deux rapports officiels (en français) présentés à l'Académie des sciences, il juge les travaux de Lobatchevski comme *incompréhensibles et entachés d'erreurs* ; selon lui, *ils ne méritent pas l'attention de l'Académie.* En 1834, c'est-à-dire entre ces deux rapports, Ostrogradski fait publier un compte rendu moins académique dans le journal *le Fils de la Patrie,* non signé mais rédigé par un des journalistes réactionnaires les plus notoires de l'époque, S.O. Bouratchek : *Géométrie*

Le philosophe Thomas Reid avait imaginé des êtres, les Idoméniens, dont la géométrie naturelle aurait été anti-euclidienne.

imaginaire ? Pourquoi en effet ne pas s'imaginer que le noir est blanc, le carré rond et la somme des angles du triangle moindre que deux droits ? On se demande pourquoi on écrit et surtout on publie de telles fantasmagories. Le vrai but de M. Lobatchevski a été certainement de jouer une farce aux mathématiciens. Et pourquoi alors le titre « les Fondements de la géométrie », et non pas « la Satire de la géométrie » ou « la Caricature de la géométrie » ?

Quoique moins violente, non moins défavorable a été l'attitude envers Lobatchevski d'un autre grand mathématicien russe contemporain, V.I. Buniakovski, célèbre probabiliste et théoricien des nombres, vice-président de l'Académie des sciences. Il faut enfin mentionner que, dans la presse spécialisée allemande, ont été aussi publiés deux comptes rendus ironiques et malveillants à l'adresse de Lobatchevski (à la plus grande consternation de Gauss).

Lobatchevski, cependant, n'a pas été privé de tout soutien. Mentionnons par exemple son collègue Kotelnikov, professeur de mécanique à l'université de Kazan, un mathématicien mineur qui s'est fait remarquer comme un des premiers propagateurs de la philosophie de Hegel en Russie ; et aussi Butlerov, l'un des chimistes les plus remarquables de l'Europe, connu en outre (comme l'astrophysicien allemand Zöllner et l'expérimentateur anglais Crookes) pour son attachement au spiritisme.

Mais si, dans le cas de Lobatchevski, on peut invoquer le fait que ses adversaires (Ostrogradski, Buniakovski) n'étaient pas des géomètres experts dans les problèmes des fondements de la géométrie, le même argument n'est plus applicable pour Jean Bolyai. Il n'a jamais été critiqué ou attaqué en public, mais il a dû affronter dans sa vie quotidienne, dès ses premières tentatives et pratiquement jusqu'à la fin de sa vie, l'adversaire le plus sérieux, le plus compétent, donc le plus dangereux : son propre père. Wolfgang Bolyai, le père de Jean, a non seulement été un mathématicien de premier rang, mais, à côté de Gauss, il a certainement été le meilleur expert du *problème des parallèles*, le problème majeur de l'époque en ce qui concerne les fondements de la géométrie. En 1786, année durant laquelle l'activité en ce domaine fut particulièrement intense, il a produit à lui seul huit tentatives de solution, c'est-à-dire autant que tous les autres auteurs réunis pendant la même année. Parmi les solutions proposées s'en trouvaient quelques-unes qui étaient particulièrement intéressantes et raffinées. Mais ce qui distinguait Wolfgang Bolyai de tous ses prédécesseurs, c'était son implacable esprit autocritique : il a toujours découvert lui-même les erreurs cachées dans ses propres raisonnements. A l'époque où son fils se mettait à attaquer le problème des parallèles, il était déjà persuadé de l'échec de toutes les tentatives de solution. Pourtant, en lisant en 1825 la première forme élaborée de la *Science absolue de l'espace*, il sut voir grâce à sa grande culture mathématique que son fils avait produit une œuvre peu commune.

Il insista pour qu'elle soit immédiatement publiée. Des exemplaires parurent, grâce à lui, en juin 1831, avant même que soit imprimé son propre livre (1832) dans les suppléments duquel le travail de son fils devait initialement trouver place. C'est lui enfin qui envoya l'un de ces premiers exemplaires à son ami Gauss avec une lettre de recommandation. De diverses façons, il aida à faire connaître les travaux de son fils. Mais ni son amour pour son fils ni sa vénération pour Gauss ne purent lui faire sauter la barrière. Il n'a jamais accepté la GNE, et il est resté, jusqu'à la fin de sa vie (1856), à la fois l'unique support moral et l'adversaire irréconciliable de son fils, ce qui a empoisonné l'existence des deux hommes.

Les réserves de Cayley et l'intolérance de Frege.

Etrange est aussi le cas du grand mathématicien anglais Arthur Cayley. Il est certainement le premier, parmi les mathématiciens sans contact personnel avec les fondateurs de la GNE, à avoir publié (1865) un travail inspiré par les résultats de Lobatchevski. Sa contribution n'est pas particulièrement essentielle, mais c'est le premier ouvrage technique consacré à la GNE où la nouvelle géométrie est considérée avec le même sérieux et la même objectivité que n'importe quelle autre théorie mathématique établie ; l'auteur, visiblement, ne met pas en doute que les développements de Lobatchevski soient logiquement corrects. Il considère cependant la GNE comme *étrange* et *incompréhensible*, et il ne peut pas l'accepter. Quant aux formules de Lobatchevski, Cayley déclare carrément *qu'il ne les comprend pas* ; mais il ajoute *qu'il serait très intéressant d'en trouver une interprétation réelle.*

Une telle interprétation « réelle » (c'est-à-dire euclidienne) a été en effet donnée un peu plus tard par Félix Klein (1871), notamment à l'aide d'une configuration découverte et étudiée

G. Saccheri (1667-1733)


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

bien avant (1859) par le même Cayle (modèle Cayley-Klein). Tout en reconnaissant la valeur du résultat de Klein, Cayley continua à formuler des réserves. Il n'accordait au système non euclidien que le statut confus et problématique de *quasi-géométrie.* Au sens strict, la dénomination de *géométrie* est réservée au seul système euclidien (1883). Mais, en 1889, il est plus explicite. D'accord avec un mathématicien anglais connu à l'époque R. Ball, il considère que ce qu'on appelle GNE n'est qu'un discours dans lequel les termes géométriques usuels sont *utilisés dans un sens différent de celui qu'on leur attribue ordinairement*. Le même terme (par exemple le mot distance) sert ainsi, selon Cayley, à exprimer deux notions tout à fait différentes. Mais Cayley n'accepte que l'existence réelle du modèle et refuse de considérer l'objet non euclidien lui-même (que le modèle traduit et représente dans l'espace euclidien).

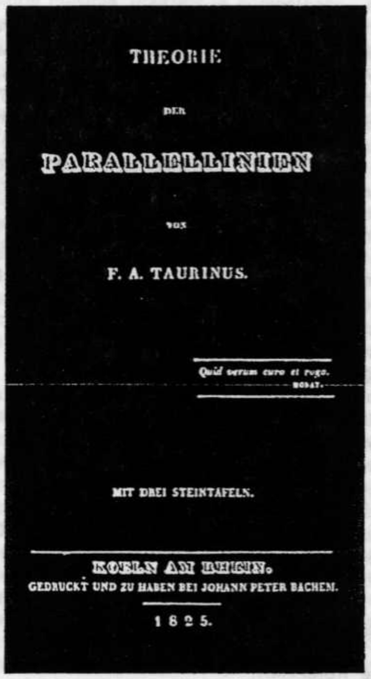
Un des adversaires les plus intolérants de la GNE a été le mathématicien et célèbre logicien Gottlob Frege. Son cas est plutôt déconcertant. Ca sa critique, toujours véhémente, passionnée, dramatique, parfois même grossière et injurieuse (surtout à l'adresse de Hilbert) se situe au début du XX^{e} siècle ; jusqu'à la fin de sa vie (1925), il a continué à rejeter la GNE avec une intransigeance implacable *oserait-on qualifier d'astrologie les « Eléments » d'Euclide, cette œuvre jouissant d'une autorité incontesté*

(3) En Allemagne, des auteurs (Lorenzen, Mittelstrass, Thiel et surtout Kambartel) se proposant la réédification radicale de toute la science mathématique à l'aide du concept de *pratique* opérationaliste ont pris récemment la défense publique non seulement de Dingler, mais de Frege contre Hilbert.

(4) Gauss n'a jamais publié ses résultats. Lobatchevski a publié son premier travail en cinq étapes entre février 1829 et août 1830. *La Science absolue* de Bolyai a été imprimée en juin 1831 sous la forme d'une brochure indépendante ; en 1832, son exposé a été republié comme un *Supplément* au manuel de son père.

(5) Dès 1834, Ampère a attiré l'attention sur la géométrie des Idoméniens. Le nom de Reid est tombé pratiquement en oubli jusqu'en 1972, date à laquelle la monographie excellente de Norman Daniels a ressuscité sa figure et son œuvre.

F.A. Taurinus (1794-1874)



THEORIE

DER

PARALLELLINIEN

VON

F. A. TAURINUS.

Quid verum curo et rogo.
HORAT.

MIT DREI STEINTAFELN.

KÖLN AM RHEIN.
GEDRUCKT UND ZU HABEN BEI JOHANN PETER BACHEM.

1825.

Saccheri, Lambert, Taurinus, Reid et quelques autres ont conçu la possibilité de construire des géométries anti-euclidiennes. Mais ce ne sont pas à proprement parler des précurseurs de Gauss, Bolyai et Lobatchevski ; en effet, ils n'ont pas franchi le pas décisif qui consistait à octroyer à toutes ces géométries à la fois le même statut de « vérité » qu'à la géométrie euclidienne.

depuis plus de deux mille ans ? Mais, si on ne l'ose pas, alors c'est la GNE qui doit être classée parmi les pseudo-sciences (astrologie, alchimie). Quoique le combat mené par Frege contre la GNE et contre ses adeptes ait été ouvert et public, quoique ses articles aient été réédités et que de nouveaux documents inédits y aient été ajoutés, la réprobation de Frege à l'encontre de la GNE est généralement ignorée : on ne mentionne sa querelle que d'une manière vague et allusive. [3] On sauve ainsi l'image hagiographique du fondateur de la logique moderne et du grand novateur dans le domaine des fondements des mathématiques.

« J'ai peur des criaillements des ignorants », écrivait Gauss à Bessel, en 1829, pour justifier son refus de publier ses résultats concernant la GNE. Mais cette formule, si justifiée qu'elle paraisse à première vue, ne doit pas être acceptée telle quelle. Car les *« ignorants »* n'ont pas été seuls en cause. En fait, parmi les cris poussés par les adversaires de la GNE, les plus stridents venaient des théoriciens les plus compétents.

La géométrie anti-euclidienne : un système cohérent mais considéré comme faux.

L'histoire des sciences montre que la résistance des experts envers des théories hétérodoxes n'est pas un phénomène rare. Mais ce qui distingue radicalement l'histoire de la GNE, c'est que cette dernière a été rejetée avant même d'être venue au monde.

La GNE proprement dite doit son apparition aux efforts indépendants de Gauss, de Jean Bolyai et de Lobatchevski. Quoique appartenant à trois générations successives, tous les trois sont arrivés à une forme achevée de leurs idées et de leur système presque simultanément, vers 1825 (Gauss en 1824, Bolyai en 1825, Lobatchevski en 1826). [4] Mais déjà Saccheri, en 1733, Lambert en 1766 et F.A. Taurinus en 1825-26 avaient énoncé et démontré des propositions qui correspondaient dans leur expression verbale à des théorèmes de la GNE. Pour les distinguer des théorèmes de la GNE proprement dite, je les désigne pour l'instant par le terme de propositions *anti-euclidiennes.*

La lecture du livre de Taurinus nous réserve une surprise : on y trouve le système anti-euclidien sous sa forme achevée. Taurinus y expose toute la trigonométrie du plan non euclidien (dans lequel *la somme des angles du triangle est inférieure à deux angles droits*), ainsi qu'un résultat particulièrement remarquable : l'existence d'une infinité de tels systèmes (opposée à l'unicité de la géométrie euclidienne), chacun étant caractérisé par une constante numérique (appelée, dans la terminologie actuelle, *courbure* de l'espace). A noter aussi que, parmi les auteurs cités, Saccheri est le seul qui ait persisté à croire à la non-consistance logique du système anti-euclidien et qui ait espéré pouvoir mettre au jour la contradiction qui, selon lui, y était cachée. Erreur. Mais erreur qui n'était pas partagée, probablement, par Lambert, et certainement pas non plus par Taurinus. Ce dernier (ainsi que tous les autres auteurs anti-euclidiens : Reid, Schweikart et Wachter) était déjà fermement convaincu de la *consistance* du système anti-euclidien. Pourtant tous les trois ont attribué aux propositions anti-euclidiennes la valeur logique de la *fausseté* et ont catégoriquement rejeté la possibilité d'une GNE proprement dite. Quoi qu'il en soit, la GNE est déjà paradoxalement présente, sous la forme du système anti-euclidien, mais reniée et laissée dans un étrange état d'ontologie négative. La situation était d'ailleurs embarrassante puisque, quoique renié, le nouveau système refusait de quitter la scène.

Mais tous les auteurs qui ont précédé Gauss, Bolyai et Lobatchevski n'ont pas rejeté la géométrie anti-euclidienne. Le philosophe écossais Thomas Reid a imaginé des végétaux doués d'intelligence humaine, disposant des seules informations que leur fournissaient leurs yeux, et a montré que la géométrie naturelle de ces *Idoméniens* serait un système anti-euclidien : *les grands cercles du globe céleste seraient pour eux des droites* (droites douées naturellement d'une longueur finie et closes sur elles-mêmes) et *la somme des angles du triangle serait supérieure à deux angles droits* (une telle géométrie non euclidienne s'appelle elliptique). Pour nous, êtres humains mobiles que la providence divine a pourvus du sens commun, *la GE reste l'unique vrai système* ; mais les Idoméniens, qui appliquent le mot *droite* aux lignes *qui en réalité ne sont pas droites*, accorderaient à leur propre géométrie la même évidence, la même vérité nécessaire que nous attribuons à celle d'Euclide. [5] Mais ce qui a échappé à Reid a été réalisé dans le cas de la géométrie hyperbolique (où *la somme des angles du triangle est supé-*

Aristote s'était bien gardé de condamner les géométries non euclidiennes comme fausses ou absurdes.

rieure à deux droits) par un élève de Gauss, Wachter. Ce dernier a reconnu non seulement la *consistance* du système anti-euclidien hyperbolique, mais il a été vraiment le premier à admettre (1816) la *vérité* de ces propositions, et cela dans le cas où le mot *droite* désigne des *lignes droites* de l'espace et non des lignes correspondant aux droites de l'espace non euclidien sur un modèle euclidien. Mais Wachter juge bon de rejeter, en revanche, la géométrie d'Euclide comme *fausse*. Plus tard, d'ailleurs, il changea d'opinion, croyant avoir démontré la non-consistance du système anti-euclidien.

La lucidité d'Aristote.

Aristote, en l'occurrence, mérite une attention toute particulière. En effet, l'analyse de son œuvre nous révèle un fait qui a été longtemps ignoré, à savoir que la source historique du cheminement qui a abouti à la création de la GNE doit être cherchée fort probablement dans le groupe des géomètres qui l'entouraient, lui et son ami Eudoxe. Selon le témoignage de son œuvre, la démonstration d'un des lemmes fondamentaux de la géométrie euclidienne était viciée par un raisonnement circulaire, sans doute parce qu'on essayait de l'effectuer par le seul moyen des propositions de la *géométrie absolue de Bolyai*, sans se rendre compte qu'on avait déjà tacitement admis dans le raisonnement une proposition auxiliaire dont la vérité dépend de la vérité du lemme euclidien qu'il fallait démontrer. En critiquant les auteurs de cette tentative, Aristote laisse transparaître l'idée que, pour échapper à ce cercle vicieux, il faut consciemment adopter comme vrai, sans aucune démonstration, un des lemmes euclidiens figurant dans le raisonnement. La construction correcte de la géométrie exige donc qu'une de ses propositions considérées jusqu'alors comme un théorème de la géométrie absolue de Bolyai soit reconnue comme un principe ou, pour prendre un terme moderne, comme un axiome.

En introduisant son postulat (le postulat des parallèles) pour fonder la géométrie euclidienne, Euclide n'a fait que répondre à cette exigence. Le problème des parallèles a ainsi précédé d'un demi-siècle au moins le postulat euclidien des parallèles. Il n'est donc pas vrai que le caractère compliqué et le manque d'évidence intuitive du postulat euclidien aient provoqué l'apparition du problème des parallèles (comme l'affirme l'histoire traditionnelle), puisque l'introduction même du postulat n'est qu'une conséquence de la première tentative pour donner une solution au problème des parallèles et que la solution d'Euclide était correcte. De nombreux passages du corpus aristotélicien nous montrent aussi que les géomètres grecs avaient déjà entrepris des essais pour démontrer l'une des propositions fondamentales de la géométrie euclidienne par réduction à l'absurde des propositions anti-euclidiennes. Ce fut un échec. Les Grecs ont en effet réussi à démontrer que l'hypothèse concernant une somme d'angles dépassant deux angles droits menait dans le cadre du système absolu de Bolyai à l'absurdité d'une paire de droites parallèles qui se coupent. La possibilité d'une des géométries anti-euclidiennes possibles était ainsi éliminée. Malheureusement, l'autre variante anti-euclidienne (somme des angles du triangle inférieure à deux angles droits) n'a pas pu être éliminée de la même manière : et ainsi l'hypothèse générale d'un système anti-euclidien, inébranlée, est devenue une provocation ouverte.

Les géomètres grecs avaient déjà, selon toute probabilité, découvert que dans l'hypothèse anti-euclidienne *le rapport de la diagonale au côté du carré prenait aussi des valeurs rationnelles*. D'une façon ou d'une autre, Aristote avait déjà perçu que cette situation ouverte ne pouvait pas être attribuée à une incapacité accidentelle, mais que l'hypothèse anti-euclidienne était réellement irréfutable : l'alternative (*triangle euclidien ou anti-euclidien ?*) est donc indécidable par les moyens du raisonnement logique (c'est-à-dire dans le cadre de la géométrie absolue). Aristote mentionne seize fois la proposition anti-euclidienne concernant la somme des angles du triangle, mais jamais il ne la qualifie explicitement d'absurde, d'impossible ou de fausse. Il mentionne cinquante-deux fois la proposition euclidienne correspondante, mais jamais il ne la présente comme une vérité nécessaire dont le contraire serait impossible, voire absurde, mais seulement comme un énoncé général (valable pour l'ensemble de *tous* les triangles). Mieux encore, il considère la démonstration connue de cette proposition comme une *quasi-démonstration*, puisque, à son avis, la somme des angles constitue *l'essence* du triangle et lui appartient sans *terme moyen* ; une telle propriété est indémontrable et doit être admise comme *principe* (axiome). Mais il parle de la somme des angles du triangle comme d'une quantité qui peut être aussi bien *égale, supérieure*, ou *inférieure* à deux angles droits (180°)

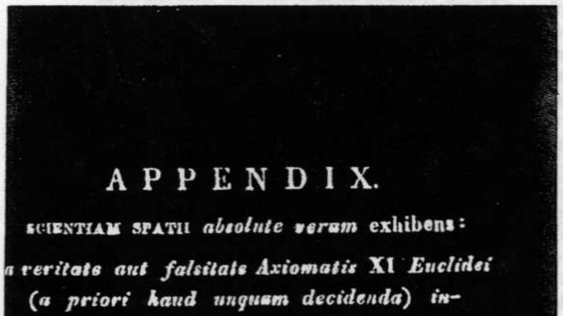
Triangle euclidien ou triangle non euclidien ? Pour Aristote, l'alternative reste ouverte.

Dans *les Seconds analytiques*, Aristote pose la question : *laquelle des deux propositions opposées concernant la somme des angles du triangle est vraie, ou laquelle des deux constitue la raison d'être du triangle, la proposition euclidienne ou celle anti-euclidienne ?* La question reste sans réponse. Aristote est très circonspect et prend soin de traiter les deux propositions antagonistes comme possédant les mêmes droits du point de vue de leur possibilité logique. Il n'a certainement jamais accepté la vérité des propositions anti-euclidiennes citées, mais il n'est pas moins vrai que jamais il n'accorde une préférence à la proposition euclidienne.

L'analyse consacrée par Aristote (*Ethique à Eudème, Grande morale*) à l'éclaircissement du concept de *liberté* se mêle à la discussion parallèle de l'exemple mathématique : géométrie euclidienne, géométrie anti-euclidienne. Les textes suggèrent fortement l'idée qu'il a envisagé le domaine de la géométrie sous l'aspect d'une profonde analogie structurelle avec le domaine de l'éthique. Il souligne d'ailleurs qu'il recourt à l'analogie géométrique justement pour mettre en évidence l'essence de l'idée de liberté (libre arbitre) grâce à ce parallèle. L'action éthico-politique (effectuée sans contrainte extérieure) est précédée par une décision initiale de l'être humain. Au point de départ de sa démarche, il se voit placé devant une alternative : une voie va l'amener au bien, l'autre l'enfoncera dans le mal. Aucun raisonnement démonstratif ne peut fonder le choix. Cette décision, première et libre, est le *principe* de l'action éthique, comme l'axiome est le principe placé au début logique d'une théorie géométrique.

La liberté, dans le domaine éthique, correspond à *l'indémontrabilité* ou *indécidabilité* logique de l'axiome géométrique. Et le caractère éthique de la décision initiale du principe de l'action éthique (le bien ou le mal) se transmettra à toute l'action, qui en découle avec nécessité, comme le caractère géométrique euclidien ou anti-euclidien de l'axiome est transmis aux théorèmes qui en découlent par la nécessité logique. Les propositions géométriques citées comme axiomes opposés, parallèlement à l'opposition éthique du bien ou du mal, sont : *la somme des angles du triangle est égale à deux angles droits, la somme des angles du triangle n'est pas égale à deux angles droits.* Est-ce qu'on

(6) Aristote et de nombreux auteurs après lui ont accepté la consistance du système anti-euclidien sans démonstration. La première démonstration de la consistance relative des systèmes euclidien et non euclidien a été donnée en 1868 par Beltrami. Gauss a accepté l'idée sans aucune tentative de la démontrer. Bolyai et Lobatchevski ont ressenti la nécessité d'une démonstration ; mais leurs tentatives n'ont pas fourni un résultat satisfaisant.



APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute verum* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Jean Bolyai (1802-1860) avait à peine vingt ans quand il commença à développer une géométrie indépendante du « onzième axiome » d'Euclide sur les parallèles. C'est en 1832 que ses travaux furent publiés en appendice à un ouvrage de son père, Wolfgang Bolyai. Des tirés-à-part furent diffusés dès le mois de juin 1831. La page de titre ci-contre annonce qu'il s'agit de « la science absolument vraie de l'espace » et indique que, si on adopte un axiome opposé à celui du postulat des parallèles d'Euclide, on peut réaliser la quadrature du cercle.

A Tirgu-Mures, la ville qu'habitaient les Bolyai, les Roumains ont édifié il y a quelques années une double statue : Bolyai le père, assis, regarde d'un œil critique et étonné Bolyai le fils qui, le poing serré, est plongé dans une puissante méditation non euclidienne. Cette dramatisation, conçue dans le style du « réalisme socialiste », exprime à sa façon une vérité historique ; car effectivement Wolfgang Bolyai, l'un des meilleurs experts de son temps sur le problème des parallèles, n'a jamais accepté la nouvelle géométrie engendrée entre autres par son propre fils.

pourra parler de la liberté de choisir entre les théories géométriques opposées ? Le contexte le suggère, mais Aristote s'abstient de toute déclaration explicite sur ce point. La situation devait l'embarrasser, puisqu'il termine le passage avec l'exclamation : *A ce moment-là on n'en peut dire rien de plus, mais il est aussi impossible de passer la question sous silence.*

Quoi qu'il en soit, ces passages impliquent tacitement qu'Aristote considérait l'alternative *triangle euclidien - triangle anti-euclidien* comme une opposition axiomatique indécidable par une inférence démonstrative et que, face à cette impossibilité, il cherchait peut-être un critère éthique pour justifier le choix de l'un et le rejet de l'autre. (6) En tout cas, il est étonnant qu'Aristote ne voie aucune raison d'exclure a priori la possibilité d'un triangle anti-euclidien sous prétexte qu'il serait faux, mauvais et relevant d'une géométrie dégénérée ; il se contente de suggérer que l'alternative reste ouverte. Mais cette idée ne s'est pas implantée et n'a joué aucun rôle historique sensible dans l'ébranlement du géocentrisme euclidien. Aristote, quoiqu'il se situe à l'origine du mouvement historique, a d'emblée adopté, du point de vue du progrès logique, la position qu'on trouve au terme de l'évolution. Par son impartialité et par la maturité philosophique de ses idées, il a dépassé tous ses successeurs.

Une démarche clé : admettre la pluralité des mondes géométriques.

Cet examen sommaire de la préhistoire de la GNE nous montre que les principales idées qui, selon la littérature courante, marquent l'avènement de la GNE proprement dite (consistance du système anti-euclidien, indécidabilité de l'alternative : *géométrie euclidienne ou anti-euclidienne*) ont été admises très tôt. La possibilité d'un système anti-euclidien a été prise en considération bien avant Gauss, Bolyai et Lobatchevski. C'est pourquoi, dans la littérature historique courante, Saccheri, Lambert, Taurinus, Wachter et Reid sont fréquemment considérés comme de vrais précurseurs, parfois même comme de vrais inventeurs méconnus d'une GNE seulement plus pauvre en théorèmes que celle de Gauss, Bolyai et Lobatchevski. La question se pose donc : est-il justifié d'attribuer l'établissement de la GNE proprement dite seulement à la triade Gauss, Bolyai, Lobatchevski ? Ou encore : est-ce qu'il existe un résultat essentiel pour l'établissement théorique de la GNE proprement dite qui soit

Le pas décisif : admettre la pluralité des mondes géométriques.

De gauche à droite : Eugen Dühring ; Charles L. Dogson, alias Lewis Caroll ; Gottlob Frege.

une contribution exclusive de Gauss, Bolyai et Lobatchevski et qu'on ne retrouve chez aucun de leurs prédécesseurs, fût-ce sous des formes fragmentaires, allusives ou conjecturales ?

La réponse est affirmative : une telle idée existe, et elle concerne la possibilité *d'accepter les deux systèmes de propositions opposés comme simultanément vrais*, en attribuant aux deux mondes géométriques qui leur correspondent la même valeur ontologique, la même réalité ; et tout cela en parlant du même objet et en conservant la même interprétation sémantique des termes fondamentaux comme *ligne droite*, *distance*, *longueur* d'un segment de droite, *congruence*, etc. dans les deux systèmes d'axiomes. Cette idée, tout à fait nouvelle, est l'œuvre exclusive de Gauss, Bolyai et Lobatchevski. Avant eux, tout le monde a vu les deux géométries opposées comme constituant les deux termes d'une stricte *alternative* : s'agissant des mêmes objets (points, droites, triangles, cercles, etc.) et le sens des termes fondamentaux demeurant invariable, *une et seulement une* des deux géométries peut être acceptée, et l'autre doit être rejetée. Bref, c'est l'idée de la *pluralité* des mondes géométriques opposée à la conception de l'*unicité* qui distingue Gauss, Bolyai et Lobatchevski de tous leurs prédécesseurs et qui justifie qu'on leur attribue de façon exclusive la GNE au sens propre. Pour distinguer entre la GNE proprement dite et les autres systèmes opposés à celui d'Euclide, j'ai désigné ces derniers d'un terme utilisé fugitivement dans le même but par Gauss et Wolfgang Bolyai, celui de géométrie *anti-euclidienne*. De ce point de vue, il est clair que les prédécesseurs de Gauss, Bolyai et Lobatchevski ne sont pas des précurseurs de la GNE, mais des représentants plus ou moins évolués de la géométrie anti-euclidienne.

Car la GNE n'est pas la somme d'une accumulation quantitative de leurs contributions, et son apparition ne peut pas être attribuée à une certaine perfection technique, à de nouveaux concepts, méthodes et procédés techniques développés à l'intérieur des sciences mathématiques. Absolument tous les résultats techniques, mathématiques et métamathématiques, peuvent être obtenus aussi dans le cadre d'une philosophie de l'unicité géométrique. Historiquement, le système anti-euclidien a été développé alors qu'on le supposait faux. La démonstration de

Charles L. Dodgson (1832-1893), plus connu sous le nom de Lewis Carroll, était un fidèle disciple d'Euclide et refusait les nouvelles géométries.

Eugen Dühring (1833-1901), qui était un personnage important dans la vie intellectuelle allemande, fut lui aussi un adversaire déterminé des géométries non euclidiennes. De nos jours, on se souvient de lui seulement parce que Engels l'a attaqué dans son « Anti-Dühring ».

Gottlob Frege (1848-1925) a joué un rôle majeur dans la constitution de la logique mathématique moderne. Mais les historiens, généralement, n'insistent pas sur le fait qu'il a rejeté sans appel les géométries non euclidiennes ; et ce jusqu'à la fin de sa vie.

A

sa consistance relative peut être effectuée si n'importe lequel des deux systèmes est considéré comme faux (et même, dans la géométrie absolue de Bolyai, si les deux postulats des parallèles, l'euclidien et le non euclidien, sont considérés comme *ni vrais ni faux*). En procédant ainsi, on obtiendra ce résultat étonnant : l'inconsistance du système considéré comme faux, comme fictif, entraîne l'inconsistance du système considéré comme vrai, comme réel. Géométrie non euclidienne et géométrie anti-euclidienne s'opposent ainsi à cause de leur philosophie immanente, celle de la pluralité contre celle de l'unicité, et on ne peut qualifier l'une d'elles de vraie et l'autre de fausse. Refuser la philosophie de la pluralité ne constitue pas une faute de raisonnement logique et certainement pas une erreur mathématique due à l'ignorance seule.

Le combat de ceux qui ont rejeté la GNE n'était que l'expression d'une certaine politique scientifique : au nom de leur idéologie, ils ont considéré de leur devoir d'intervenir dans le développement de la science. Rétrospectivement, on peut admettre que leur réussite aurait eu pour conséquence de bloquer partiellement le progrès scientifique.

Fécondité de la négation.

Le caractère anti-intuitif de la GNE a choqué les esprits du XIXe siècle à cause de la conception dominante d'une géométrie conçue comme science de l'espace physique ou comme émanation d'une intuition spatiale a priori, pure et nécessaire. C'est certainement la raison pour laquelle les partisans de la GNE ont été tous d'avis que la révolution de la GNE consistait dans l'élimination définitive de l'argument basé sur l'évidence intuitive. Mais cela n'est qu'un aspect mineur de la GNE, et qui d'ailleurs se retrouve dans le cas de la topologie et même de l'analyse classique.

Si l'on veut garder la résonance politique du terme *révolution* appliqué à l'histoire des sciences, c'est sur la philosophie de la pluralité qu'il faut mettre l'accent : elle a été l'unique responsable du bouleversement réellement révolutionnaire. En d'autres termes, cette révolution a été engendrée par un changement radical de point de vue. Cet aspect est souvent méconnu, mais il n'a pas échappé à l'attention des adversaires les plus acharnés de la GNE. Dühring, Renouvier et surtout Frege ont très bien saisi que le point capital (et pour eux le plus inacceptable) de la GNE était justement la philosophie de la pluralité qui la véhicule. *On ne peut servir deux maîtres à la fois ; on ne peut servir à la fois le vrai et le faux. Si la GE est vraie, alors la GNE est fausse ; et si la GNE est vraie, c'est la GE qui doit être fausse.* Ainsi argumentait Frege.

Il n'est pas erroné de refuser la philosophie de la pluralité ; il est en tout cas très difficile d'y adhérer. En effet, la trajectoire qui mène à l'établissement de la GNE est peut-être encore plus bizarre que les propositions biscornues qu'elle engendre. Historiquement, la géométrie anti-euclidienne a précédé la géométrie non euclidienne proprement dite. L'unique système « vrai » et « réel » était la géométrie euclidienne ; une première proposition anti-euclidienne a été obtenue par la négation formelle de l'axiome des parallèles d'Euclide ou de l'un des théorèmes fondamentaux qui en découlent. Inséré dans le texte euclidien, le mot *non* renverse le sens d'une proposition en lui donnant automatiquement la valeur de *fausseté*. Le système anti-euclidien résulte de cette première proposition par le moyen mécanique de l'inférence logique. C'est proprement un sous-système du système des propositions euclidiennes ; les propositions composant son réseau sont toutes des théorèmes euclidiens dont la *fausseté* (dans la géométrie euclidienne) est démontrable. Le monde qu'on est tenté d'y associer est ontologiquement opposé à celui de l'espace euclidien, non seulement comme irréel, mais comme impossible et consciemment fictif. L'apparition de la GNE est due à *une deuxième négation* : le discours garde son expression verbale anti-euclidienne en même temps que sa sémantique initiale, il change seulement son signe logique. Cette deuxième négation remplace la valeur du faux par celle du vrai. Un nouveau système vrai, un nouveau monde géométrique réel s'est ainsi constitué. Mais la GNE a laissé inébranlé le système auquel elle est irréconciliablement opposée ; mieux, c'est seulement par la géométrie non euclidienne que la géométrie euclidienne a pu être confirmée comme système autonome. Comme Tristan et Iseult, les deux géométries ne peuvent ni vivre ni mourir qu'ensemble.

Le résultat d'une libre création.

C'est un véritable acte de création qui a fait surgir la GNE, mais le mot qui l'a fait surgir est le mot *non*. La négation est créatrice. Par la particule « non » se réalise la conjonction historique des deux systèmes. A la GNE correspond une structure évolutive non euclidienne dans laquelle, sous sa forme anti-euclidienne, le non-être précède l'être, le *contre* vient avant le *pour*. Elle postule l'impossible sous la forme d'un discours menteur et le transforme en réalité et en vérité.

Frege, l'adversaire le plus redoutable de la GNE, a bien vu ce point essentiel. Il a rejeté la GNE (et aussi la théorie des nombres réels de Cantor et Dedekind) pour la même raison : elles sont bâties toutes les deux sur un acte de création, attribuant de l'existence à des objets dont l'impossibilité d'existence est démontrable dans un système préalablement donné. La source directe de son opposition est son anti-créationisme irréductible, conséquence de son ontologie platonicienne. Très logiquement, il ne pouvait que refuser la pluralité des mondes géométriques. Car la « philosophie de la pluralité », en fait, n'est qu'une façon euphémique de désigner « une philosophie de la création ». ■

Pour en savoir plus :

■ R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover, 1955.

■ H. Delong, *A Profile of Mathematical Logic* (chap. 2 : Non-Euclidean Geometry), Addison-Wesley, 1970.

■ D. Gans, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Academic Press, 1973.

■ L. Roth, « Geometry and the Scientific Imagination », *Rendiconti di Matematica*, 1-17, 1970.

■ W.H. Brock, « Geometry and the Universities : Euclid and His Modern Rivals, 1860-1901 », *History of Education*, 21-35, 1975.

■ N. Daniels, « Thomas Reid's Discovery of a non-Euclidean Geometry », *Journal of the Philosophy of Science*, 219-234, 1972.

■ F. Gonseth, *la Géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel, 1958.

■ I. Toth, « Non-Euclidean Geometry before Euclid », *Scientific American* 221, 87-98, 1969.

■ I. Toth, *Die nicht-euklidische Geometrie in der Phaenomenologie des Geistes*, Heiderhof, 1972.

■ H. Poincaré, *la Science et l'hypothèse*, 1903 ; *Dernières pensées*, 1913, Flammarion.