

L'algèbre de François Viète, au cœur de son programme analytique



Louis Charbonneau
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

**Colloque "François Viète, un mathématicien en son temps"
(Fontenay-le-Comte 1540 – Paris 1603)
19 et 20 septembre 2003**

Plan de l'exposé

1. Un problème et sa solution (Ghetaldi)
2. La reconstitution de l'analyse des anciens
 - a) L'analyse
 - b) Les essais jusque vers 1630
3. De l'algèbre, généralisation du numérique, à l'algèbre outil d'analyse.
4. La logistique spéculative, une approche axiomatique
5. La structure de l'art analytique
6. Conclusion

Un problème et sa solution (Ghetaldi)

Problème VIII, *De Resolutione et Compositione Mathematica*, 1630

Étant donné la base d'un triangle, sous-tendant l'angle droit, et la différence des cathètes. Trouver le triangle.

92

De Resol. & Comp. Mathematica

Problema VIII.

Dada base trianguli, angulum rectum subtendente, & differentia crurum.
Inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit D data basis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & trianguli illius aggregatum crurum esto A , ergo $A + B$ erit duplum cruris maioris, $A - B$ duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $\frac{A+B}{2}$, simplum crus minus $\frac{A-B}{2}$. Sed cum quadrata crurum equalia sint quadrato basis

$$A^2 - B^2 = D^2$$

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Potestas

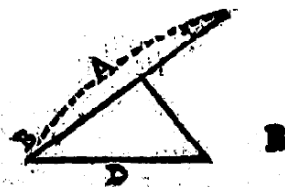
$$A^2 + B^2 = D^2$$

Et ablato vtrinq; B^2 , vt cognita ab incognitis separentur

$$A^2 = D^2 - B^2$$

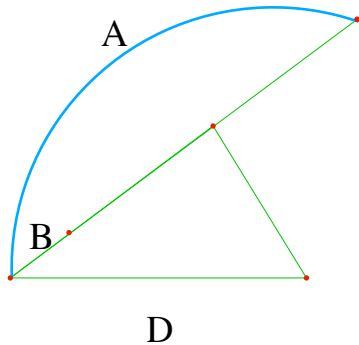
Porisma:

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentie crurum equalis est quadrato aggregati crurum.
Datur ergo aggregatum crurum de quo querebatur.



Résolution

Soit cela fait, avec D , la base et B la différence des cathètes.



$A + B = 2$ (grande cathète)

$A - B = 2$ (petite cathète)

Or

la somme des carrés des cathètes = D^2 ,

donc $A^2 + B^2 = 2D^2$

ou $A^2 = 2D^2 - B^2$ (le porisme)

(Suite de la composition)

Par construction, on a

$$A^2 = 2D^2 - B^2,$$

donc, par l'équivalence des propositions de la résolution,

$A+B = 2$ (grande cathète)

$A-B = 2$ (petite cathète)

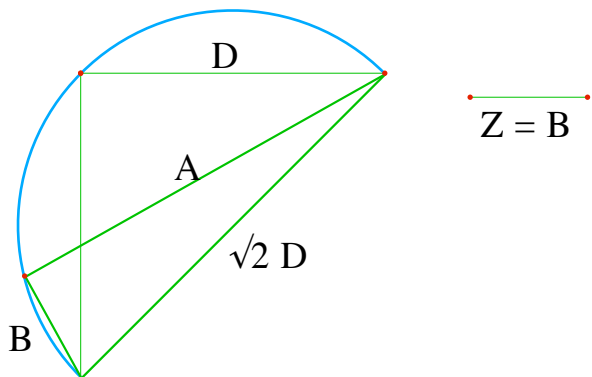
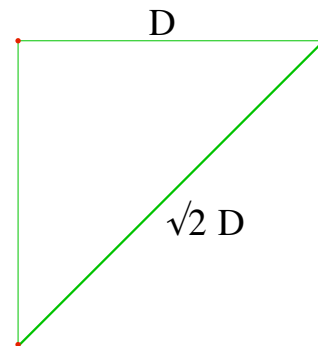
et, par calcul,

$$\begin{aligned} d^2 = \text{la somme des carrés des cathètes} &= \\ \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2 + B^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}D)^2}{2} \\ &= D^2. \end{aligned}$$

On a donc $d^2 = D^2$, d'où $d = D$.

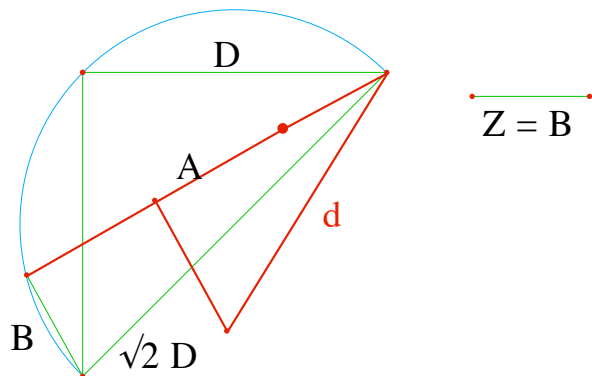
Composition

[Construction : reproduire le porisme]



A satisfait le porisme.

Connaissant la somme A et la différence B , construire le triangle.



Le triangle d'hypoténuse d satisfait le porisme. Reste à montrer que $d = D$
Cela se fait par l'inverse de la résolution.
(suite colonne de gauche)

2. La reconstitution de l'analyse des anciens : analyse

Trois dates importantes :

- 1560 Découverte par Antoine Maria Pazzi d'une copie des *Livres arithmétiques* de Diophante.
- 1575 Publication de la première traduction latine, par Xylander.
- 1588 Traduction latine, par Commandino, de la *Collection mathématique* de Pappus.

Pappus d'Alexandrie (290-350),

La Collection Mathématique, Trad. Paul ver Eecke, Paris 1933, p. 477.

Livre VII

Le champ de l'analyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissance de trouver les problèmes qui leurs sont proposés. C'est en suivant la voie de l'**analyse** [αναλυσις, la résolution] et de la **synthèse** [συντεσις, la construction] que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. **L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédée.** En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutissent à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la **solution.** **Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes au autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.**

(Page titre de l'ISAGOGE)

2. La reconstitution de l'analyse des anciens :essais

- 1591 François Viète
In artem Analyticam Isagoge
- 1593 François Viète
*Zeteticorum Libri quinque
et Effectioinum Geometricarum Canonica recensio
et Supplementum Geometria
et Variorum de rebus Mathematicis responsorum, Libri septem*
- 1600 François Viète
*Francisci Vietae Apollonius Gallus seu Apollonii Pergaei
περι επιαιρων Geometria*
- 1607 François Viète (par Marino Ghetaldi)
Apollonius Gallus
- 1612 Bachet de Méziriac
Apollonius
- 1612 Alexandre Anderson
*Supplementum Apollonii redivivi, sive Analysis problematis hactenus
desiderati*
- 1615 François Viète (par Alexander Anderson)
Ad Angularium Sectionum Analyticam Theoremata
- 1615 Alexandre Anderson
*Αιτολογία Pro zetetico Apolloniani problematis a se iam pridem edito in
supplemento Apollonii Redivivi*
- 1616 Clément Cyriaque de Mangin
*Problemata duo nobilissima, quorum nec analysin geometricam, videntur te nuisse Ioannes
Regiomontanus et Petrus Nonius; nec demonstrandum satis accuratam repraesentasse,
Franciscus Vieta et Marinus Ghetaldus, nunc demum a Clemente Cyriaco diligentius
elaborata et novia analyseon formis exulta... .*
- 1617 Alexander Anderson
*Animadversiones in Franciscum Vietam a Clemente Cyriaco nuper brevis
Διακρισις*
- 1627 Giovanni Camillo Gloriosi
Exercitationum mathematicorum decas prima-tertia
- 1630 A. Vasset (prob. Claude Hardy)
L'Algèbre nouvelle de M^r Viète
- 1630 I.L. Sieur de Vaulézard
Introduction dans l'art analytique ou nouvelle algèbre de François Viète.
- 1630 Marino Ghetaldi
De resolutione et de compositione mathematica libri quinque

3. De l'algèbre, généralisation du numérique, à l'algèbre outil d'analyse.

Problématique :

- Qu'est-ce qu'un nombre ?
- L'algèbre comme une extension de l'arithmétique
- Le nombre et la géométrie.

Pierre de la Ramée (1515-1572)

- La présentation du savoir
- L'homogénéité des domaines de connaissances
- À bas Euclide
- Analogie Algèbre — Analyse

François Viète (1540-1603)

- Le *Canon mathematicus* (1579) : La recherche de l'inconnue à partir de ce qui est connu.
- Changement de paradigme : délaisser le numérique pour le l'analyse en géométrie.
- Première réponse aux critères ramusiens : La logistique spécieuse

4. La logistique spécieuse, une approche axiomatique

Les axiomes de la logistique spécieuse (Bos 2001, p. 149)

1. *La Loi des homogènes* : Seules les grandeurs de même type (de même dimension) peuvent être comparées, additionnées et soustraites (la plus grande de la plus petite)
2. À l'intérieur d'une échelle de grandeurs, il y a un élément, appelé « côté » ou « racine », qui par multiplication par lui-même génère successivement les grandeurs de toutes les dimensions dans cette échelle ; ceci induit la numérotation des dimensions successives comme des degrés successifs.
3. À l'intérieur d'une échelle de grandeurs, toutes deux grandeurs peuvent être multipliées ; la dimension du produit est la somme des dimensions des facteurs. La division est l'opération inverse de la multiplication ; toute grandeur peut être divisée par une grandeur de dimension plus petite, la dimension du quotient étant la différence des deux dimensions.
4. La multiplication est commutative, l'addition et la multiplication interagissent distributivement.
5. N'importe quelles deux grandeurs de même dimension ont un rapport satisfaisant les règles habituelles des rapports et proportions. Une proportion peut être transformée en une égalité par l'équivalence $a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$.

Exemple d'équation : $\left\{ \frac{\begin{array}{l} S \text{ in } A \text{ planum} \\ R \text{ bis in } A \text{ planum} \end{array}}{R} \right\} \text{ æquabitur } B \text{ plano}$

5. La structure de l'art analytique

Zététique Mise en équation du problème et manipulation de cette équation pour la mettre sous une forme canonique qui donne lieu à une interprétation en termes de proportions. Une telle équation est dite ordonnée et la proportion qui lui correspond est elle-même dite ordonnée. Cette proportion est appelée la constitution de l'équation.

Poristique Pour le cheminement synthétique, étude de certains passages délicats du cheminement analytique dont la réversibilité n'est pas assurée de façon immédiatement convaincante. (Le sens à donner au poristique fait l'objet de nombreuses discussions)

Exégétique Détermination, sous une forme cohérente avec la nature du problème, de la ou des racines de l'équation ordonnée issue du Zététique.

Zététique

De Recognitione Aequationum (De l'examen des équations) (1615).¹

Si B par A - A carré est égal à Z carré : il y a trois proportionnelles, dont la moyenne est Z, l'agrégat des extrêmes B ; et A est faite la plus petite ou la plus grande des extrêmes

Autrement dit :

$AB - A^2 = Z^2 \implies$ Il existe x, y, z tel que $x:y :: y:z$ tels que $Z = y$ et $B = x+z$ et $A = x$ ou z .

La partie de droite de l'implication est la constitution de l'équation.

l'implication inverse.²

Effectioinum Geometricarum Canonica Recensio (Revue canonique des constructions géométriques) (1593), proposition XI

S'il y avait trois lignes droites proportionnelles : le rectangle sous la composée des extrêmes et l'autre de celles-ci, plus grande ou plus petite, diminué du carré de la même autre, est égal au carré de la moyenne.

¹ François Viète, *De Recognitione Aequationum*, Paris, 1615, chapitre III, théorème III. La traduction est de Jean Peyroux dans François Viète, *Œuvres mathématiques*, Première partie, Œuvres mathématiques, suivies du Dénombrement des réalisations géométriques et du supplément de géométrie, traduction par Jean Peyroux, Paris, 1991, p. 149.

² François Viète, *Effectioinum Geometricarum Canonica Recensio*, Paris, 1593, proposition XI. La traduction est de Jean Peyroux dans François Viète, *Opus cit.*, p. 340.

Exégétique numérique

Soit propos $370 N - 1 Q$ égale 9,261. On demande la valeur de $1N$ ou de la racine du carré arraché proposé.³

Exégétique géométrique

Le problème de Ghetaldi

³ François Viète, *De Numerosa Potestatum Ad Exegesim Resolutione*, Paris, 1600, problème XVI. Traduction de J Borowczyk, publié dans les Cahiers d'Histoire des Mathématiques et d'Épistémologie, Poitiers, mai 1989.

	Partie	Titre	Commentaire
1591	Description du programme	<i>In artem Analyticem Isagoge</i>	Republié en 1624 par Jean de Beaugrand
1593	Zététique	<i>Zeteticorum Libri quinque</i>	Une série de problèmes
1593	Exégétique géométrique	<i>Effectioinum Geometricarum Canonica recensio</i>	Traduction du zététique en termes purement géométriques
1593	Exégétique géométrique	<i>Supplementum Geometria</i>	<i>Idem</i>
1593	Exemple d'utilisation de la nouvelle algèbre	<i>Variorum de rebus Mathematicis responsorum, Libri septem</i>	
1600	Exégétique numérique	<i>De numerosâ potestatum ad Exegesim resolutione</i>	Publié par Marino Mhetaldi
1600	Exemple d'utilisation de la nouvelle algèbre	<i>Francisci Vietae Apollonius Gallus seu Apollonii Pergaei περι επιρων Geometria</i>	
1607	Exégétique géométrique	<i>Apollonius Gallus</i>	Publié par Marino Mhetaldi
1615	Zététique (Logistique spécieuse)	<i>De recognitione Aequationum</i>	Publié par Alexander Anderson. Théorie des équations.
1615	Zététique (Logistique spécieuse)	<i>De Emendatione Aequationum Tractatus Secundus</i>	Publié par Alexander Anderson. Joint au précédent. Correspond peut-être au traité non publié <i>Ad Logisticem speciosam Notæ posteriori</i> . Modification des équations.
1615	Exemple d'utilisation de la nouvelle algèbre	<i>Ad Angularium Sectionum Analyticem Theoremata</i>	Publié par Alexander Anderson. Joint aux deux précédents.
1615	Exemple d'utilisation de la nouvelle algèbre	<i>Analytica angularium sectionum in tres partes tributa</i>	
1624	Zététique (Logistique)	<i>Ad Logisticem Speciosam</i>	Réédité en 1631. Publié les deux fois par Jean

6. Conclusion

- *Nullum non problema solvere.*
Oui mais lesquels problèmes ?
- L'autonomie de la logistique spécieuse :
démonstrations autosuffisances.
- La reconstruction de l'analyse des anciens :
une faiblesse : le choix de la résolution de la
neusis comme axiome supplémentaire de la
géométrie.
- Un héritage trompeur : Analyse = algèbre.