Activité 1 : Équivalence des expressions

*Point d’insertion suggéré :* en début d’année scolaire, après que les élèves soient devenus familiers avec les techniques élémentaires de la calculatrice. Ces techniques sont citées ci-dessous (voir début de la Partie I).

[Dans les Parties III et IV de cette activité, les élèves vont apprendre à utiliser deux commandes algébriques et tests d’équivalence de la calculatrice]

**Leçon 1**

# Partie I (avec la calculatrice) :

# Comparer des expressions par des évaluations numériques

**But :** une approche numérique en vue d’une discussion sur l’équivalence d’expressions.

Note à l’enseignant : cette activité évite délibérément d’utiliser les termes « équivalence » ou « expressions équivalentes » jusqu’à la discussion en classe, après la Partie III.

Pour le travail à venir, nous supposons que les élèves ont acquis les techniques élémentaires suivantes, sur la calculatrice :

1. Insérer des parenthèses au dénominateur et au numérateur d’expressions rationnelles ;
2. Insérer l’opérateur explicite de multiplication (\*) pour multiplier deux variables ou pour multiplier une variable avec une constante ou une autre expression.
3. Savoir utiliser l’opérateur de « substitution » ( | ), pour évaluer des expressions quand une valeur est attribuée à *x* ;
4. Savoir utiliser les flèches et la touche « supprimer » pour changer les parties de texte sélectionnées dans la ligne d’édition ;
5. Savoir remplacer des portions de texte de la ligne d’édition par n’importe quelle expression présente dans la « zone historique » de l’écran de la calculatrice.
6. Savoir effacer la ligne d’édition ou n’importe quelle autre ligne de la zone historique de la calculatrice ;
7. Être habitué à vérifier, par inspection visuelle, les expressions inscrites dans la ligne d’édition.

I (A) Travail individuel (25 minutes)

Les habiletés décrites ci-dessus sont prérequises

Le tableau ci-dessous présente 5 expressions algébriques et 2 valeurs possibles pour *x*.

Utilise les deux valeurs données de *x* (c’est-à-dire 1/3 et -5), et deux autres de ton choix, pour calculer les valeurs de chaque expression. Utilise l’outil de « substitution » ( **|** ) de la calculatrice.

**Important :** pour compléter le tableau, procède ligne par ligne.

Garde la trace des valeurs additionnelles que tu as choisies pour *x* dans la rangée supérieure du tableau. Garde la trace des résultats dans les rangées appropriées.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Pour *x* =  | 1/3 | -5 |  |  |
| Expression | Résultat | Résultat | Résultat | Résultat |
| 1. (*x*–3)(4*x*–3) |  |  |  |  |
| 2. (*x*2+*x*–20)(3*x*2+2*x*–1) |  |  |  |  |
| 3. (3*x*–1)(*x*2–*x*–2)(*x*+5) |  |  |  |  |
| 4. (-*x*+3)2 + *x*(3*x*–9) |  |  |  |  |
| 5.  |  |  |  |  |

I (B) Compare les résultats des différentes expressions du tableau précédent, et écris ce que tu observes dans la boîte ci-dessous.

I (C) Question de réflexion

En te basant sur les observations que tu as consignées ci-dessus, peux-tu émettre des hypothèses sur ce qui arriverait si le tableau en I(A) était prolongé pour inclure d’autres valeurs de *x*?

|  |
| --- |
|  |

## Discussion en classe de la Partie I A, B, C

**Discussion en groupe-classe** (à réaliser après avoir complété la Partie I A, B, C, 20 minutes)

Un point de départ pour la discussion sera les réponses fournies par les élèves à la question de réflexion. L’enseignant peut débuter la discussion en demandant : « Qu’avez-vous remarqué ? » et « Qu’avez-vous conclu ? ».

Difficultés attendues dans la discussion[[1]](#footnote-1):

* Certains élèves peuvent s’attarder au fait que toutes les cases ne contiennent pas le même résultat (c-à-d. qu’ils peuvent avoir concentré leurs efforts à la recherche d’égalités entre les cases du tableau). D’autres élèves peuvent avoir remarqué des résultats égaux par paires. En réponse à cette situation, demandez : « Quelles paires d’expressions donnent des résultats égaux? »
* Si certains élèves proposent que les expressions 1 et 4 donnent des résultats égaux pour chacune des valeurs de *x* (les valeurs données dans le problème et les valeurs choisies), alors l’enseignant peut soulever la question suivante : « Est-ce que quelqu’un d’autre a remarqué cette égalité pour **ses** choix de valeurs de *x* (pour cette paire d’expressions) ? Est-ce que cela vous surprend ? Pourquoi ? » Nous croyons que certains élèves seront surpris par le fait que les expressions ont des formes bien différentes. L’enseignant devrait faire ressortir les idées des élèves à cet égard : « En quoi ces expressions sont-elles différentes ? »
* Suggestions de questions pour poursuivre la discussion : « Y a-t-il une autre paire d’expressions pour laquelle des expressions de différentes formes donnent des résultats égaux ? », « Lesquelles ? »

Il est probable que certains élèves proposeront les expressions 3 et 5 (Demander aux élèves : « Est-ce que cela vous surprend ? Pourquoi ? »). L’enseignant doit également demander : « Qu’en est-il de l’expression 2 ; que peut-on en dire par rapport aux autres expressions ? »

* Ce qui suit est la suggestion d’une intervention que pourrait faire l’enseignant, dans le but de susciter la discussion chez les élèves : « Nous avons remarqué que pour chacune des valeurs de *x* choisies, les expressions 1 et 4 donnent toujours des résultats égaux. Il en va de même pour les expressions 3 et 5. Pensez-vous que ce sera toujours le cas pour ces deux paires d’expressions ? » La discussion peut alors être orientée vers les problèmes suivants :
1. le premier consiste à traiter le domaine de définition d’une expression
2. le second est de motiver les élèves à utiliser des techniques algébriques.

i. Questions suggérées à ce point de l’activité : « Peut-on choisir *n’importe quelles* valeurs de *x* pour ces expressions? », « Quel est le domaine de définition de chacune des expressions données ? » (nous prévoyons ici tenir une discussion sur les restrictions s’appliquant à *x* pour chacune des expressions).

ii. « Pour chacune de ces paires d’expressions, en prenant en considération les contraintes sur *x*, est-ce que toutes les valeurs données à *x* fournissent des résultats égaux ? En d’autres termes, pouvez-vous trouver une valeur de *x* pour laquelle une paire d’expressions déterminée va donner des résultats **différents** ? Comment peut-on répondre à cette question sans tester toutes les valeurs possibles de *x*? »

(*Note :* cette dernière question doit motiver l’utilisation de méthodes algébriques et de propriétés pour tester l’équivalence des expressions.)

* Même si certains élèves proposent de réexprimer les *formes* des expressions de manière à obtenir une forme commune à chacune, l’enseignant devrait intervenir de la façon suivante, dans le but d’aider les élèves à faire la transition entre les approches numériques et les approches algébriques.

Pendant qu’il écrit au tableau, l’enseignant dit « Nous pouvons multiplier ces deux facteurs pour donner à l’expression une forme différente :

(*x*+1)(*x*+2) = *x*(*x*+2) + 1(*x*+2)

 = *x*2 + 2*x* + *x* +2

 = *x*2 + 3*x* + 2

Remarquez que les expressions originale et finale (de même que toutes les expressions intermédiaires) ont des formes différentes. Maintenant, choisissez n’importe quelle valeur de *x* et substituez-là dans chacune des quatre expressions (allouer quelques minutes aux élèves pour réaliser ces substitutions). Que remarquez-vous ? Pourquoi est-ce que chacune de ces expressions produit le même résultat numérique lorsque *x* est remplacé par n’importe quel nombre ?

Maintenant, d’une manière réciproque, nous avons remarqué dans le tableau (voir tableau ci-dessus) que des paires d’expressions donnaient toujours des résultats égaux lorsqu’on leurs substitue une valeur donnée de *x* (à savoir, les expressions 1 et 4 et les expressions 3 et 5). En vous basant sur l’exemple traité précédemment, pouvez-vous utiliser l’algèbre pour convertir l’une des expressions d’une des deux paires dans la forme de l’autre expression de la même paire, ou bien pouvez-vous transformer chacune des expressions d’une paire en une forme commune ? **Si vous pouvez faire cela, vous aurez alors prouvé que chaque substitution de *x* donne toujours la même valeur pour les deux expressions. »**

Idée importante qui devrait être mise en lumière par l’enseignant : « En multipliant les deux facteurs dans l’exemple traité précédemment, nous réexprimons une expression donnée dans une forme différente. » Cette idée vise à faire une transition vers la Partie II de l’activité.

Note pour l’enseignant :

Si certains élèves éprouvent des difficultés à comprendre ce que signifie « une **forme commune** », l’enseignant peut utiliser l’exemple ci-contre pour illustrer ces propos :

*x*2 + 3*x* + 2 est une forme commune de (*x*+1)(*x*+2) et de *x*(*x*+2) + 1(*x*+2).

**Partie II (avec papier-crayon, 20 minutes) :**

**comparaison d’expressions par manipulations algébriques**

**But :** utiliser l’algèbre pour obtenir des formes communes pour des expressions données.

II (A) En te basant sur les observations faites dans la Partie I(A) et les discussions qui ont suivi, peux-tu conjecturer lesquelles des expressions du premier tableau pourraient être exprimées sous une forme commune ?

|  |
| --- |
|  |

II (B) Afin de tester tes conjectures avec l’algèbre (**papier-crayon**), réexprime les expressions données sous une autre forme (pas nécessairement une forme développée). Montre ton travail dans la colonne de droite du tableau.

|  |  |
| --- | --- |
| **Expression donnée** | **Forme réexprimée de l’expression donnée** |
| 1. (*x*–3)(4*x*–3) |  |
| 2. (*x*2+*x*–20)(3*x*2+2*x*–1) |  |
| 3. (3*x*–1)(*x*2–*x*–2)(*x*+5)  |  |
| 4. (-*x*+3)2 + *x*(3*x*–9) |  |
| 5.  |  |

II (C) Dans la partie **I(C)**, tu as énoncé des conjectures basées sur des évaluations numériques d’expressions. Explique si les manipulations algébriques de la partie **II(B)** soutiennent (ou non) chacune de ces conjectures.

|  |
| --- |
|  |

Pour chaque conjecture de la partie **I(C)** non soutenue par tes manipulations algébriques de la partie **II(B)**, dis comment tu expliques cette discordance.

**Activité 1 : Équivalence des expressions**

**Leçon 2 : Utilisation de la calculatrice pour vérifier l’équivalence d’expressions**

**Partie III (avec la calculatrice, 20 minutes avec discussion) :**

**Vérification de l’équivalence en réexprimant la forme d’une expression**

**Utilisation de la commande EXPAND**

**But**: utiliser la calculatrice comme outil fournissant des informations sur l’équivalence d’expressions.

Deux stratégies possibles sont envisagées : (i) Utiliser la commande EXPAND de la calculatrice pour réexprimer les formes ; (ii) Utiliser la calculatrice pour vérifier l’équivalence sans réexprimer les formes, au moyen d’un test d’égalité.

La colonne de gauche du tableau ci-dessous présente les expressions de la leçon précédente. Utilise ta calculatrice pour remplir la colonne de droite avec les expressions produites par la commande EXPAND (dans le menu F2 de ta calculatrice).

Syntaxe : EXPAND(*expression*)

|  |  |
| --- | --- |
| **Expression donnée** | **Résultat produit par EXPAND** |
| 1. (*x*–3)(4x–3) |  |
| 2. (*x*2+*x*–20)(3*x*2+2*x*–1) |  |
| 3. (3*x*–1)(*x*2–*x*–2)(*x*+5)  |  |
| 4. (-*x*+3)2 + *x*(3*x*–9) |  |
| 5.  |  |

## Discussion en classe de la Partie III

**Questions pour la discussion**

1. « Qu’est-ce que la commande EXPAND semble faire? » (Voir la page 131 du manuel anglais de la TI-92 plus pour une description de la commande EXPAND.)

2. Concernant les expressions 1 et 4

1. « Pour les expressions 1 et 4, avez-vous trouvé la même forme développée que celle produite par la calculatrice ? »
2. « Regardez attentivement les expressions données 1 et 4. Pouvez-vous factoriser l’expression 4 de manière à obtenir la même forme que l’expression 1? »
3. « Remarquez que nous avons obtenu une forme commune pour les expressions 1 et 4 de deux manières différentes : (i) en développant les expressions 1 et 4 pour produire la forme commune 4*x*2–15*x*+9 ; (ii) en factorisant l’expression 4 pour la réexprimer sous la forme de l’expression 1. Que pensez-vous de ces deux méthodes différentes pour obtenir des formes communes ? »

3. « Est-ce que les expressions 3 et 5 peuvent être transformées, sans les développer, pour avoir la même forme ? » (en utilisant la factorisation ou la simplication)

4. « Est-ce que votre travail en algèbre papier-crayon réalisé à la leçon précédente et les résultats fournis par la calculatrice produisent des résultats similaires ? De quelle manière ? » (l’objectif de cette question est seulement d’*aborder*, et non de développer, le fait que les formes produites par la calculatrice peuvent être différentes de celles produites par le travail papier-crayon)

5. Remarques de conclusion : « En s’appuyant sur le travail algébrique ainsi que sur les vérifications effectuées à l’aide de la calculatrice, peut-on conclure que les expressions 1 et 4 peuvent être réexprimées dans une même forme algébrique? » Même question pour les expressions 3 et 5.

**Définition d’expressions équivalentes**

On spécifie un ensemble de nombres admissibles pour *x* (c.-à-d. que les nombres pour lesquels une des expressions n’est pas définie sont exclus). Si, pour chaque nombre admissible, chacune des expressions donne la même valeur lorsque ce nombre est substitué à *x*, alors on dit que ces expressions sont *équivalentes* sur l’ensemble des valeurs admissibles.

Nous pouvons conclure que, sur l’ensemble des nombres réels, les expressions 1 et 4 sont équivalentes. Similairement, sur l’ensemble des nombres réels excluant -2, les expressions 3 et 5 sont équivalentes.

**Partie IV (avec la calculatrice, 20 minutes) :**

**Vérification de l’équivalence sans réexprimer la forme d’une expression**

**Utilisation du test d’égalité**

**Buts**: Comprendre ce qui se produit lorsqu’on entre dans la calculatrice deux expressions qui sont *a)* équivalentes, et *b)* non équivalentes.

On peut vérifier si deux expressions sont équivalentes sans avoir à réexprimer leurs formes. Cette approche alternative utilise le test d’égalité de la calculatrice.

IV (A) Directement dans la ligne d’édition de la calculatrice, entre l’équation formée des deux expressions 3 et 5:

(3*x*–1)(*x*2–*x*–2)(*x*+5) = 

1. Qu’affiche la calculatrice comme résultat ?

|  |
| --- |
|  |

2. Comment interprètes-tu ce résultat ?

|  |
| --- |
|  |

3. Utilise l’outil de substitution ( | ) de ta calculatrice pour remplacer *x* par -2 dans l’équation ci-dessus. Interprète le résultat affiché par la calculatrice.

|  |
| --- |
|  |

## Discussion en classe de la Partie IV A

Discussion brève portant sur la Partie IV A. « En affichant le résultat « true », remarquez que la calculatrice n’a pas pris en considération les valeurs inadmissibles pour *x*. »La distinction suivante entre les Parties A1 et A3 devrait être mise en évidence : notez que la Partie IV A3 n’est **pas** un test d’équivalence. Il s’agit plutôt d’un test d’égalité numérique. Puisqu’une des expressions ne peut pas être évaluée en *x* = -2, l’égalité n’est pas vérifiée. La Partie IV A1, par contre, est un test d’équivalence.

IV (B) Entre, directement dans la ligne d’édition de la calculatrice, l’équation formée des deux expressions 2 et 3:

 = 

1. Qu’affiche la calculatrice comme résultat ?

|  |
| --- |
|  |

1. Comment interprètes-tu ce résultat ?

|  |
| --- |
|  |

## Discussion en classe de la Partie IV B

Discussion brève portant sur la Partie IV B. « Qu’affiche la calculatrice comme résultat ? » « Pourquoi est-ce que la calculatrice affiche-t-elle « false » dans le dernier cas (c-à-d., à la question B.2) ? » Réponse : cette équation formée par les expressions 2 et 3 n’est pas toujours vraie ni toujours fausse. En fait, seulement certaines valeurs de *x*, lorsqu’elles sont substituées dans chacun des membres de l’équation, donnent des valeurs égales. Encore une fois, il est important de remarquer qu’en affichant « true » ou « false », la calculatrice ne prend pas en considération les valeurs admissibles ou inadmissibles de *x*.

Pour résumer, nous avons rencontré 3 cas lors de l’utilisation des tests d’équivalence de la calculatrice :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Cas** | **Ce qui est affiché par la calculatrice** | **Remarque** |
| Deux expressions qui sont équivalentes sans restriction. | “true” |  |
| Deux expressions qui sont équivalentes sous certaines restrictions. | “true” | La calculatrice ne prend pas en considération les valeurs inadmissibles de *x*. |
| Deux expressions qui ne sont pas équivalentes. | La même équation qui a été entrée dans la ligne d’édition.  |  |

**Partie V (avec la calculatrice, 20 minutes) :**

**Vérification de l’équivalence**

**Utilisation de la calculatrice selon l’une ou l’autre des méthodes**

Voici un nouvel ensemble d’expressions :

|  |
| --- |
| Expression donnée |
| 1.  |
| 2.  |
| 3.  |
| 4.  |

V (A) Utilise ta calculatrice pour déterminer lesquelles de ces expressions sont équivalentes. Utilise la méthode-calculatrice que tu préfères. Garde la trace, dans le tableau ci-dessous, de ce que tu entres dans la calculatrice et de ce que la calculatrice affiche.

(Note à l’enseignant : cette question a été délibérément posée de manière très ouverte. L’équipe de recherche est intéressée à obtenir des informations sur les « orientations naturelles » des élèves à ce point de l’activité ; en particulier, si les méthodes de substitution numérique sont perçues par les élèves comme étant adéquates pour déterminer l’équivalence d’expressions.)

|  |  |
| --- | --- |
| **Ce que tu entres dans la calculatrice** | **Résultat affiché par la calculatrice** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

V (B) En te basant sur le travail dont tu as gardé la trace ci-dessus, lesquelles de ces expressions sont équivalentes ? (N’oublie pas de spécifier l’ensemble des nombres admissibles pour *x*.)

Justifie, STP, tes décisions en ce qui concerne l’équivalence.

|  |
| --- |
|  |

1. Note à l’équipe de recherche : nous tentons de traiter plusieurs problèmes importants dans cette discussion. Nous devons être conscients qu’il pourra s’avérer nécessaire de créer des activités supplémentaires pour s’assurer que ces problèmes soient considérés/développés par les élèves de la manière souhaitée. Nous devrons être TRÈS attentifs à la classe durant cette activité. [↑](#footnote-ref-1)