Actividad 6: Factorización

**Objetivos:** establecer conexiones entre sí de los conceptos que los estudiantes ya conocen, mediante la aplicación de estas fórmulas:

; ; ,

y desarrollar la generalización dada por: .

# Parte I (con papel y lápiz, y con CAS, 20 minutos): búsqueda de patrones en los factores

1. (a) Antes de usar la calculadora, trata de recordar la factorización de cada una de las expresiones algebraicas enlistadas en la columna izquierda de la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Verificación usando FACTOR (muestra el resultado exhibido en la pantalla de CAS) |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### Discusión en el salón de clases de la Parte I, 1a, seguido por el trabajo simultáneo de los estudiantes, y discusión en torno a 1b y 2a-2d

Reflexión sobre los resultados obtenidos de la Pregunta 1a. Deseamos considerar estas mismas identidades, pero desde un punto de vista distinto. Hacia el final, permita a los estudiantes mirar las formas factorizadas de  y de , y ver si ellos pueden detectar algunos indicios de un patrón. “¿Qué observas acerca de estas dos expresiones factorizadas?” De entre las respuestas esperadas de los estudiantes, algunas debieran estar relacionadas con el hecho de que (*x*− 1) es un factor del polinomio  y de . La ayuda que pueda darse a los estudiantes, para que comprendan los componentes de los patrones recién surgidos de estas factorizaciones, puede ser fomentada mediante la relación explícita que ellos pueden tener de las formas expandidas y factorizadas de estos dos ejemplos. Sugerimos que el profesor escriba en el pizarrón, mientras pregunta:

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ y  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

“Entonces, ¿qué obtenemos cuando multiplicamos estas formas factorizadas?”

Preguntar a cada estudiante las respuestas correspondientes que dio al trabajar en su hoja esta actividad (Pregunta 1. (b)). Mediante la realización de la multiplicación indicada; los estudiantes debieran llegar a las mismas formas expandidas con las que ellos comenzaron en la Pregunta 1a. Las preguntas de 2(a) a 2(d) pueden, por tanto, ser abordadas por el grupo, para que los estudiantes compartan sus respuestas y la racionalidad subyacente respecto de cómo cada uno de ellos llevó a cabo su trabajo.

Obtenemos (los estudiantes escribirían, también, abajo sobre sus hojas de trabajo):

1. (b) Efectúa las operaciones indicadas:

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
|  |

1. (a) Sin hacer operación algebraica alguna, anticipa el resultado del producto .

2. (b) Verifica el resultado anticipado precedente, usando papel y lápiz (en el rectángulo de abajo) y, después, usando la calculadora.

|  |
| --- |
|  |

**Nota para el profesor**: es importante discutir la idea respecto a que algunos términos pueden cancelarse.

2. (c) ¿Qué tienen en común las siguientes tres expresiones? Y, ¿en qué difieren?

, , y .

2. (d) ¿Cómo explicas el hecho de que los productos precedentes son todos ellos un binomio, si se llevó a cabo la multiplicación de: dos binomios, un binomio con un trinomio, y un binomio con un tetranomio?

\*\*\*\*\*\*

**Discusión en el salón de clases de la Pregunta 2d**

Discusión: en este punto, el grupo puede poner en práctica los diferentes métodos de multiplicación y vincular, con ellos mismos, los términos telescópicos presentes en los productos resultantes.

Por ejemplo, usando la propiedad distributiva de la multiplicación:

,

|  |  |
| --- | --- |
| y usando la forma vertical del algoritmo de la multiplicación: |  |

1. (e) Tomando como base en las expresiones que has encontrado hasta ahora, pronostica una factorización de la expresión: .
2. (f) Explica por qué el producto (*x* –1) (*x*15 + *x*14 + *x*13 + … + *x*2 + *x* + *1*) da como resultado: *x*16–*1*

Nota: el objetivo del ejercicio precedente es saber si, en este punto, los estudiantes son capaces de anticipar la expresión resultante, relacionada con la cancelación de los términos esperados de la multiplicación.

1. (g) Tu explicación (en (f), precedente) ¿también es válida para la siguiente igualdad?

(*x* –*1*) (*x*134 + *x*133 + *x*132 + … + *x*2 + *x* + *1*) = *x*135–*1*

Explica:

\*\*\*\*\*

# Discusión en el salón de clases de la Parte I

Los resultados precedentes pueden ayudarnos a anticipar una factorización general de la expresión , para valores enteros de *n*. El profesor podría plantear la pregunta: “¿Podemos anticipar el resultado antes de usar la calculadora?”

En este punto, la discusión puede dirigirse hacia la importancia que tiene el factor  y el hecho de que al multiplicar este binomio por un polinomio de la forma: , el resultado es la suma [diferencia] del primero con el último término del producto. Este resultado es obtenido mediante la distribución del factor *x*, después el factor –1, a través de todos los términos del segundo polinomio, llegando, de este modo, al binomio adecuado mediante la cancelación de los términos “internos”.

En síntesis, para valores enteros de *n* tenemos:



\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## Parte II (40 minutos): hacia una generalización (actividad con papel y lápiz, y con calculadora)

(A) 1. En esta actividad, cada línea de la tabla de abajo debe ser completada en su totalidad (las tres celdas), una fila a la vez. Inicia a partir de la fila de arriba (las celdas de las tres columnas) y trabaja en dirección hacia abajo.

Si para una fila dada, los resultados en las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas, usando manipulaciones algebraicas y escríbelas en las columnas de la derecha.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Resultado dado por el comando FACTOR | Cálculos para reajustarlas, si es necesario |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

2. Elebora una conjetura, en general, ¿para qué números *n* la factorización de :

1. contiene exactamente dos factores?
2. contiene más de dos factores?
3. incluye a  como factor?

Por favor, explica:

**Discusión en el salón de clases de la Parte II A**

Antes de preguntar acerca de sus conjeturas, la discusión debe enfocarse sobre las diferentes formas de factorizar *x*6 – 1, que es una expresión donde *n* es múltiplo de 2 y de 3.

Conjeturas: conjeturamos que los estudiantes primero distinguirán los casos donde *n* es par o impar. Anticipamos que muchos de ellos conjeturarán (de forma incorrecta) que hay más de dos factores para los números pares *n* > 2 y sólo dos factores cuando *n* es impar.

El profesor puede proponer  como un contra-ejemplo para esta conjetura, donde la forma factorizada tiene tres factores.

Recomendamos que, en esta parte, los estudiantes trabajen, ya sea de forma individual o en grupo en la revisión de sus conjeturas. Ellos trabajarán en la Parte II B.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**Parte II continuación (con papel y lápiz, y con calculadora)**

(B) 1. Como con la Parte A precedente, cada línea de la tabla de abajo debe ser completada en su totalidad (las tres celdas), una fila a la vez, antes de proceder a la próxima fila. Inicia en la fila de más arriba y trabaja hacia abajo.

Si para una fila dada, los resultados en las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas, usando manipulaciones algebraicas y escríbelas en las columnas de la derecha.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Resultado dado por el comando FACTOR | Cálculos para reajustarlas, si es necesario |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

2. Con base en los patrones que observaste en la tabla B precedente, revisa (si es necesario) tu conjetura de la Parte II (A) 2.

Esto es, ¿para qué números *n* la factorización de :

i) contiene exactamente dos factores?

ii) contiene más de dos factores?

ii) incluye a  como factor?

Por favor, explica

(C) Sin usar tu calculadora, contesta las siguientes preguntas:

1. La expresión: 

* 1. ¿contiene más de dos factores?
  2. ¿incluye a  como factor?

Por favor, explica:

2. La expresión: 

1. ¿contiene más de dos factores?

ii) ¿incluye a  como factor?

Por favor, explica:

3. La expresión: 

1. ¿contiene más de dos factores?

ii) ¿incluye a  como factor?

Por favor, explica:

**Discusión en el salón de clases de la Parte II B y C**

# Discusión con el grupo

El propósito de la **Parte II** es motivar a los estudiantes para que descubran las relaciones generales, dados valores enteros de *n*.

Más específicamente, pretendemos que se promueva el hecho de que para *n* primo, la factorización será de esta forma:



mientras que para *n* par,la forma de la factorización, la cual involucra una nueva factorización del segundo factor, incluirá como factores a: (*x* – 1) y (*x* + 1).

En la siguiente discusión, de la Parte II A, el contra-ejemplo



ayuda a promover la distinción entre los casos de *n* primo, *n* > 2 con *n* par y *n* impar, pero sin ser primo.

**Si *n* es par y *n* > 2**, entonces  y  son dos factores del polinomio factorizado.









**Si *n* es un número primo,** la expresión factorizada contiene sólo dos factores:











**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Parte III: papel y lápiz, tarea de desafío**

Explica por qué (*x* + 1) es siempre un factor de  para valores pares de *n* ≥ 2.

|  |
| --- |
|  |

**Investigación opcional**

**Nota para el profesor:** si se deseapromover el estudio de las raíces complejas de polinomios, que se han abordado en esta parte, se puede solicitar a los estudiantes que lleven a cabo una investigación tendiente al desarrollo de ideas que se desea abordar más adelante. Para esta investigación, los estudiantes necesitarán saber cómo multiplicar dos números complejos.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Considerando las diferentes expresiones polinomiales, que se han trabajado en esta parte, y en las que nuestro objetivo fue encontrar las raíces de esos polinomios, regresamos ahora a estudiar lo que llamamos “**raíces de la unidad**”.

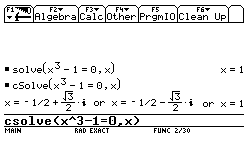
Por ejemplo, calcula las raíces reales de la ecuación polinómica , la cual es equivalente a *x*4 = 1, se puede proceder mediante la factorización:

.

Esta factorización lleva a las soluciones , ,  y , que son cuatro raíces en el plano complejo.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Otro ejemplo: encontrar las raíces reales del polinomio *x*3 – 1 se reduce a resolver la ecuación , la cual puede ser resuelta con el comando SOLVE de la calculadora. Sin embargo, también se pueden encontrar las raíces reales y *complejas* de este polinomio, buscando las soluciones complejas de  mediante el comando CSOLVE de la calculadora:



Lo anterior, es lo mismo que decir que la ecuación  es equivalente a

.

Nota que ,  y *x3* =. Estos tres números complejos, *x*1, *x*2 y *x*3 llamados “*las tres raíces de la unidad*”, son las tres soluciones de la ecuación , la cual es equivalente a *x*3 = 1; es decir, las soluciones son las raíces cúbicas de 1. Estos tres números complejos tienen la propiedad de que ellos pueden ser localizados en el círculo unitario (i.e., el círculo centrado en (0, 0) con radio de longitud 1) en el plano complejo:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

En efecto, *x*2 y *x*3 son raíces del polinomio *x*2 + *x* + 1. Esto es, ellas son soluciones de la ecuación *x*2 + *x* + 1 = 0. Más aún, el producto de cualquiera de tales raíces complejas, siempre es una de esas raíces.

¿Se puede continuar, de la misma manera, con las otras expresiones que han sido desarrolladas hasta ahora?

¿Te diste cuenta de cierta regularidad en la obtención de las raíces de la unidad?