Nombre: Fecha:

Actividad 6: Factorización

# Parte I (con papel y lápiz así como con calculadora): observación de patrones en los factores

1. (a) Antes de usar la calculadora, trata de recordar la factorización de cada una de las expresiones algebraicas enlistadas en la columna izquierda de la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Verificación usando FACTOR (muestra el resultado exhibido en la pantalla de la calculadora  *si es diferente del que hayas obtenido*) |
| *(a+b)(a-b)* | *(a+b)(a-b)* |
| *(a-b)(a2+ab+b2)* | *(a-b)(a2+ab+b2)* |
| *(x-1)(x+1)* | *(x-1)(x+1)* |
| *(x-1)(x2+x+1)* | *(x-1)(x2+x+1)* |

**Discusión en el salón de clases de la Parte I, 1a**

1. (b) Efectúa las operaciones indicadas (usando papel y lápiz)

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
|  |

2. (a) Sin hacer manipulación algebraica alguna, anticipa el resultado de los siguientes productos:

|  |
| --- |
|  |

2. (b) Verifica los resultados precedentes anticipados, usando papel y lápiz (en el rectángulo de abajo), y después usando la calculadora.

Papel y lápiz

 *x4+x3+x2+x- x3-x2-x-1* = *x4-1*

Calculadora:

Expand ()

2. (c) ¿Qué tienen en común las siguientes tres expresiones? Y ¿en qué difieren?

, , y .

*(x-1)* es un factor de cada una de las tres expresiones

El otro factor es una suma de potencias de *x*, cuyos exponentes son cada vez más grandes en una unidad: primero a la potencia 1 ( *x+1*), después dos (*x2+x+1*), y finalmente tres (*x3+x2+x+1*).

1. (d) ¿Cómo explicas el hecho de que los productos precedentes son todos ellos un binomio, si se llevó a cabo la multiplicación de: dos binomios, un binomio por un trinomio y un binomio por un tetranomio?

•  = *x*2-1

•  = *x*3-1

•  = *x*4-1

Estos productos dan como resultado un binomio porque se cancelan mutuamente los términos positivos y negativos.

**Discusión en el salón de clases de la Pregunta 2d**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

1. (e) Tomando como base las expresiones que has encontrado hasta ahora, pronostica una factorización de la expresión: .

*(x-1)(x4+x3+x2+x+1)*

1. (f) Explica por qué el producto: (*x* –1) (*x*15 + *x*14 + *x*13 + … + *x*2 + *x* + *1*) da como resultado: *x*16–*1*

El producto de *x* por cada término del segundo factor da *x16 + x15 + …+x*.

El producto de –1 por cada término del segundo factor da -*x15- x14 - …-x-1*.

Así, todos los términos negativos excepto -1 se anulan con los términos positivos correspondientes, para dar finalmente *x16-1*.

1. (g) Tu explicación (en (f), precedente) ¿también es válida para la siguiente igualdad?

(*x* –*1*) (*x*134 + *x*133 + *x*132 + … + *x*2 + *x* + *1*) = *x*135–*1*

Explica:

Sí, la igualdad también es válida. Se aplica el mismo procedimiento de anulación de los términos “interiores”.

Discusión en el salón de clases de la Parte I

## Parte II: Hacia una generalización (actividad con papel y lápiz así como con calculadora)

II(A) 1. En esta actividad, cada línea de la tabla de abajo debe ser completada en su totalidad (las tres celdas) una fila a la vez. Empieza de arriba hacia abajo.

Si, para una fila dada, los resultados de las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la columna de la derecha.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Resultado dado por el comando FACTOR | Cálculos algebraicos para reajustarlas, si es necesario |
| *(x-1)(x+1)* | *(x-1)(x+1)* |  |
| *(x-1)(x2+x+1)* | *(x-1)(x2+x+1)* |  |
| *(x2+1)(x2-1)*  = *(x2+1)(x+1)(x-1)* | *(x2+1)(x+1)(x-1)* | Si factorizaste  como *(x-1)(x3+x2+x+1*), esprobable que no te hayas dado cuenta de que el segundo factor también podía ser factorizado. |
| *(x-1)(x4+x3+x2+x+1)* | *(x-1)(x4+x3+x2+x+1)* |  |
| *(x3+1)(x3-1)*  = *(x+1)(x2-x+1)(x-1)(x2+x+1)* | *(x+1)(x2-x+1)(x-1)(x2+x+1)* | *x6-1* puede ser factorizada mediante varios procedimientos: aplicando la identidad de la diferencia de cuadrados; aplicando la identidad de la diferencia de cubos, o bien aplicando la regularidad descubierta al hacer esta actividad. Continua factorizando tanto como sea posible. |

II.(A).2. Elabora una conjetura, en general, ¿para qué números *n* la factorización :

1. contiene exactamente dos factores?

Cuando *n* es 2, 3 o 5.

1. contiene más de dos factores?

Cuando *n* es 4 o 6.

1. incluye a  como factor?

Cuando *n* es 4 o 6.

Por favor, explica:

Podrías predecir que sucederá cuando *n* sea mayor 6 ?

¿Qué tipo de números son 2, 3 et 5?

¿Qué tipo de números son 4 et 6?

Se podrían hacer varias conjeturas, pero éstas deberían ser verificadas. Ver la parte II B.

**Discusión en el salón de clases de la Parte II A**

**Parte II, continuación (con papel y lápiz así como con calculadora)**

II(B) 1. Como con la Parte A precedente, cada una de las líneas de la tabla de abajo, debe ser completada en su totalidad (las tres celdas), una fila a la vez, antes de proceder a la fila siguiente. Trabaja de arriba hacia abajo.

Si, para una fila dada, los resultados de las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas usando manipulaciones algebraicas pertinentes; escribe tu trabajo en la columna de la derecha.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorización usando papel y lápiz | Resultado dado por el comando FACTOR | Cálculos algebraicos para reajustarlas, si es necesario |
| *(x-1)(x6+x5+x4+x3+x2+1)* | *(x-1)(x6+x5+x4+x3+x2+1)* |  |
| *(x4+1)(x4-1)*  *= (x4+1)(x2-1)(x2+1)*  *= (x4+1)(x-1)(x+1)(x2+1)* | *(x-1)(x+1)(x2+1)(x4+1)* |  |
| *((x3)3-1)*  *= (x3-1)((x3)2+ x3+1)*  *= (x-1)(x2+x+1)(x6+ x3+1)* | *(x-1)(x2+x+1)(x6+ x3+1)* |  |
| *((x5)2-1)*  *= (x5-1)(x5+1)*  *= (x-1)(x4+x3+x2+x+1)(x+1)(x4-x3+x2-x+1)* | *(x-1)(x+1)(x4+x3+x2+x+1)(x4-x3+x2-x+1)* | Es probable que no sea evidente que *(x5+1)* puede ser expresada como el producto de factores. |
| *(x-1)(x10+x9+ … +x2+x+1)* | *(x-1)(x10+x9+ … +x2+x+1)* |  |
| *((x4)3-1)*  *= (x4-1)((x4)2+x4+1)*  *= (x2-1)(x2+1)(x8+x4+1)*  *= (x-1)(x+1)(x2+1)(x8+x4+1)* | *(x-1)(x+1)(x2+1)(x2+x+1)(x2-x+1)(x4-x2+1)* | EXPAND *((x2+x+1)(x2-x+1))* da  *(x4+x2+1)*  y  EXPAND *((x4+x2+1)(x4-x2+1))* da  *(x8+x4+1)*  Por tanto *(x8+x4+1)* se factoriza en  *(x4+x2+1)(x4-x2+1)*,  que de nuevo puede ser factorizada como *(x2+x+1)(x2-x+1)(x4-x2+1)*. |
| *(x-1)(x12+x11+ … x+1)* | *(x-1)(x12+x11+ … x+1)* |  |

II.(B).2. Con base en los patrones que observaste en la tabla II.B precedente, revisa (si es necesario) tu conjetura de la Parte A. Esto es, ¿para qué números *n* la factorización de :

Cuando *n* es 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

i) contiene exactamente dos factores?

Cuando *n* es 4, 6, 8, 9, 10 y12.

ii) contiene más de dos factores?

ii) incluye a  como factor?

Cuando *n* es 4, 6, 8, 10 y 12.

¿Te parece que tus predicciones son correctas?

¿Puedes ahora predecir en general qué sucederá cuando *n* sea mayor que 13 ?

Por favor, explica:

La factorización completa de *xn-1* contiene exactamente dos factores cuando *n* es primo. [Estos dos factores son *(x-1)* y *(xn-1+xn-2+ … +xn-(n-1)+1)* ]

Cuando *n* es un número par mayor que 2, se obtienen siempre más de dos factores y *(x+1)* es siempre uno de ellos.

Además, como la identidad *x2-1 = (x+1)(x-1)* puede ser aplicada a la expresión *xn-1* cuando *n* es par, se obtiene también el factor *(x-1)* en este caso.

Cuando *n* es impar, pero no primo, la factorización de *xn-1* contiene más de dos factores: *(x-1)* será uno de ellos, pero no *(x+1)* .

II(C) Sin usar calculadora, responde las siguientes preguntas:

1. La expresión: 

* 1. ¿contiene más de dos factores?
  2. incluye a  como factor?

Por favor, explica:

Como 2004 es par y mayor que dos, habrá más de dos factores y *(x+1)* será uno de ellos.

2. La expresión: 

1. ¿contiene más de dos factores?

ii) incluye a  como factor?

Por favor, explica:

Como 3003 es un número que es múltiplo 3, éste no es primo.

La factorización de *x3003-1* tendrá por tanto más de dos factores, pero *(x+1)* no será uno de ellos.

3. La expresión: 

1. ¿contiene más de dos factores?

ii) incluye a  como factor?

Por favor, explica:

Se debe verificar si 853 es un número primo.

Si se introduce FACTOR(853) en la calculadora, el resultado es 853. Esto quiere decir que 853 es un número primo.

La factorización completa de *x853-1* es de exactamente dos factores.

**Discusión en el salón de clases de la Parte II B y C**

**Parte III: papel y lápiz, tarea-desafío**

Explica por qué (*x* + 1) es siempre factor de  para valores pares de *n* ≥ 2.

|  |
| --- |
| *xn* – 1 *= x*2*k* – 1(para *n* par)  = (*x*2)*k* – 1  = (*x*2 – 1)    = (*x* + 1)(*x* – 1)( … )  Otra forma (mediante reagrupación de términos). Para dos valores pares de *n* (*n* = 8, por ejemplo):  *x*8 – 1 = (*x* – 1)( *x* 7 + *x* 6 + *x* 5 + *x* 4 + *x* 3 + *x* 2 + *x* + 1)  = (*x* – 1)( *x* 6(*x* + 1) + *x* 4(*x* + 1) + *x* 2(*x* + 1) + 1(*x* + 1))  = (*x* – 1)(( *x* + 1)( *x* 6 + *x* 4 + *x* 2 + 1))  = (*x* – 1)( *x* + 1)( *x* 6 + *x* 4 + *x* 2 + 1)  = … |