Nombre: Fecha:

Actividad 7: Factorización y solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales (una actividad de integración)

*Nota para el estudiante*: El objetivo central de esta actividad es que veas el uso de la factorización (obtención de factores comunes) como una herramienta para resolver ecuaciones, particularmente, cuando es usada en conjunción con el teorema del “cero como producto de factores”.

*He aquí algunos objetivos específicos:*

* + Comprender que la factorización (obtención de factores comunes) puede ser aplicada no sólo en constantes y variables, sino también en expresiones algebraicas compuestas; las cuales pueden ser tomadas como objetos para operar con ellas;
  + Ser capaz de reactivar, en cierto momento, los métodos aprendidos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Debes ser capaz de emplear esos métodos cuando resuelves ecuaciones que no son ni lineales ni cuadráticas, *per se*;
* Comprender que la simplificación de una ecuación, al dividir ambos lados por un mismo factor, puede llevar a la pérdida de soluciones. En ecuaciones donde tales simplificaciones son posibles, la estrategia de llevar ciertos términos de un solo lado de la ecuación y usar el teorema del cero como producto de factores, generalmente, permite un mejor control sistemático de las soluciones buscadas;
* Comprender la necesidad de verificar las soluciones de las ecuaciones que involucran variables bajo el signo radical.

1. Supón que se te pregunta cómo resolver esta ecuación:

 (\*)

1.a) ¿Cómo procederías cuando se te presenta tal “monstruo” de ecuación? (De hecho, no resuelvas la ecuación, sólo muestra la forma general de cómo procedes para abordarla.)

|  |
| --- |
| Una forma posible es considerar  como objeto de manipulación algebraica; objeto que es posible separar de la ecuación dada.  Una estrategia de resolución recomendada sería reagrupar los términos que contienen  como factor, y utilizar la factorización y el teorema del cero como producto de factores para resolver la ecuación equivalente así obtenida.  Otra estrategia de resolución podría ser: dividir los dos lados de la ecuación por , tomando en cuenta que *x* > 4 (¿por qué?) Esto produce una ecuación (¿equivalente?) lineal en *x* y, por tanto, resoluble. |

1.b) Usando papel y lápiz, observa si puedes resolver primero la siguiente ecuación, que es, de algún modo, análoga al “monstruo” precedente:

(*y*-2)3 –10(*y*-2) = *y*(*y*-2) (\*\*)

*Sugerencia*: la factorización (obtención de factores comunes) puede ser útil en este caso.

|  |
| --- |
| Si se utiliza el procedimiento general delineado en 1.a):  1. Se puede sustraer *y(y-2)* de los dos lados de (\*\*) para producir la ecuación equivalente  *(y-2)3 –10(y-2)-y(y-2) = 0*  2. De esta ecuación se factoriza *(y-2)* para producir una segunda ecuación equivalente  *(y-2)[(y-2)2 –10-y] = 0*.  3. Se simplifica la ecuación precedente utilizando el álgebra y la factorización para producir las siguientes ecuaciones equivalentes:  *⇔ (y-2)[(y-2)2 –10-y] = 0*  *⇔ (y-2)[y2-4y+4 –10-y] = 0*  *⇔ (y-2)[y2-5y–6] = 0*  *⇔ (y-2)(y+1)(y-6) = 0*  4. De la última ecuación precedente se aplica el teorema del cero como producto de factores, para poder resolverla:  *(y-2)(y+1)(y-6) = 0 ⇔ y-2 = 0, o bien y+1 = 0, o bien y-6 = 0*    *⇔ y = 2 o y = -1 o y = 6* |

1.c) Compara tu solución de la ecuación (\*\*) con la obtenida al usar el comando SOLVE de la calculadora. Si las soluciones obtenidas son diferentes, verifica tu trabajo algebraico, usando papel y lápiz. Si la calculadora da una solución adicional a la que encontraste, determina qué manipulaciones algebraicas, con papel y lápiz, te llevaron a perder la solución adicional. Por favor, muestra todo tu trabajo en el espacio siguiente.

|  |
| --- |
| El comando “SOLVE(*(y-2)3 –10(y-2) = y(y-2), y)*” produce el resultado  “*y = 2 o y = -1 o y = 6*”.  La calculadora da exactamente las mismas soluciones que las producidas antes, utilizando lápiz y papel. |

**(Discusión en el salón de clases de las preguntas 1.a, 1.b y 1.c)**

2. a) Tomando como base las estrategias empleadas para resolver la ecuación previa (\*\*), usa papel y lápiz para encontrar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

 (\*\*\*).

Muestra todo tu trabajo en el espacio que sigue:

|  |
| --- |
| Se considera a  como objeto en las manipulaciones algebraicas siguientes:  1. Se sustrae *(3u-7)* de los dos lados de (\*\*\*) para obtener la ecuación equivalente    *5()3 + 4-(3u-7) = 0*  2. Se factoriza  (término común) para producir otra ecuación equivalente  [*5()2* + *4-(3u-7)*] *= 0.*  3. Ayudándose de manipulaciones algebraicas, se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes  (*5u* + *4-3u + 7) = 0 ⇔* *(2u +11) = 0.*  4. Se utiliza el teorema del cero como producto de factores para resolver la ecuación equivalente final:  *(2u +11) = 0⇔  = 0 o bien (2u +11) = 0*  *⇔ u = 0 o bien u = -11/2*  5. Dado que  no corresponde a un número real cuando *u* < 0, entonces *u = -11/2*; un valor no admisible. El conjunto solución de (\*\*\*) es por tanto {0}. |

2. b) Sustituye los valores que obtuviste como soluciones de la ecuación (\*\*\*), utilizando el operador de sustitución (“**|**”) de tu calculadora. ¿Qué resultado muestra la calculadora? ¿Hay soluciones que eliminarías? Explica por qué.

|  |
| --- |
| Se introduce la expresión “ **|** *u* = {0, -11/2}” en seguida se presiona ENTER, y la calculadora da como resultado “{true, false}”.    La calculadora confirma por tanto que *u = -11/2* no es una solución admisible (ya que este valor no satisface la ecuación en el conjunto de los números reales). Se debe por tanto eliminar *u = -11/2*, tal como fue explicado antes. |

**(Discusión en el salón de clases de la Pregunta 2)**

3. Continuando el trabajo en papel y lápiz, ahora trata de resolver la ecuación original (\*):

.

Determina primero las condiciones bajo las cuales las soluciones son admisibles, dados los radicales. Después, compara tu solución con la obtenida por la calculadora, y discute la validez de cada valor encontrado. Muestra todo tu trabajo en el espacio que sigue:

|  |
| --- |
| Dado que  es un número real sólo cuando *x* ≥ 4, entonces las soluciones que satisfagan esta condición serán las posibles de tal ecuación.  Se utiliza la estrategia de resolución análoga a la utilizada en la Parte 2a:  ⇔[5()2 + 11-(2*x* + 1)] = 0  ⇔ [5(*x*-4)+ 11-2*x-*1)] = 0  ⇔ [5(*x*-4)+ 11-2*x-*1)] = 0  ⇔ (3*x-*10) = 0  ⇔  = 0, o (3*x-*10) = 0  ⇔ *x* = 4, o *x* = 10/3  Dado que *x* = 10/3 < 12/3 = 4, esta es solución una posible. Por tanto{4} es el conjunto solución de la ecuación dada.  El comando “solve” de la calculadora produce las mismas soluciones; sin embargo, al verificarlas utilizando el operador sustitución de ésta (“**|**”) ella indica que *x* = 10/3 es inadmisible en el conjunto de los números reales. |

**(Discusión en el salón de clases de la Pregunta 3)**

Tarea-desafío

a) Resuelve la siguiente ecuación, usando papel y lápiz:

.

Siguiendo los procedimientos utilizados al resolver los últimos problemas, se debe notar que las soluciones posibles de esta ecuación deben satisfacer la condición 2*x*-1 ≥ 0 [o de forma equivalente *x* ≥ 1/2].

Se puede resolver la ecuación mediante reagrupación y factorizacion de términos, considerando a como objeto en las manipulaciones algebraicas:



⇔ [()4 + 3()2 + 5-(8*x*+7)] = 0

⇔ [(()2)2 + 3(2*x*-1) + 5-8*x*-7)] = 0

⇔ [(2*x*-1)2 + 6*x*-3+ 5-8*x*-7)] = 0

⇔ [4*x*2-4*x* + 1-2*x*-5] = 0

⇔ (4*x*2-6*x*-4) = 0

⇔ 2(2*x*2-3*x*-2) = 0

⇔ 2(2*x* + 1)(*x*-2) = 0

⇔  = 0, o 2*x* + 1 = 0, o *x*-2 = 0

⇔ *x* = 1/2 o *x* = -1/2 o *x* = 2

El valor de *x* = -1/2 es inadmisible, ya que éste no satisface la condición precedente.

b) ¿Qué soluciones muestra la calculadora de esta ecuación? Discute la validez de esas soluciones.

Utilizando el comando “solve”, la calculadora muestra las tres soluciones antes obtenidas mediante procedimientos algebraicos. Sólo el valor *x* = -1/2 es inadmisible, como se constató antes. Sin embargo, si se trata de verificar, utilizando el operador sustitución, en la ecuación original, la calculadora da como resultado {true, true, true} en lugar de la respuesta correcta {true, false, true}.