Chapitre 6

Solutions des exercices

5.1 Courbes

5.1.1

a) On a $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
Le vecteur vitesse est

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$$

et sa grandeur est

$$||\mathbf{v}(t)|| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = \sqrt{8t^2} = t\sqrt{8}$$

Le vecteur accélération est

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

La trajectoire
On note que $\mathbf{r} = t^2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \mathbf{k}$ et on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite dans l'espace : en posant disons $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ et $h = t^2$ on obtient :

$$\mathbf{r}(h) = h\mathbf{u} + \mathbf{k}$$

qui donne la droite qui passe par (0,0,1) et avec le vecteur directeur $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$. Comme h ne prend que des valeurs positives on obtient plutôt la demi-droite qui part de (0,0,1) et qui pointe dans la direction $\mathbf{u}$. (voir la figure en annexe)

b) On a $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$
Le vecteur vitesse est

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin(t)\mathbf{i} + a\cos(t)\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

et sa grandeur est

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Le vecteur accélération est

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\cos(t)\mathbf{i} - a\sin(t)\mathbf{j}$$

La trajectoire

On aura reconnu l'équation paramétrique d'une hélice circulaire de rayon a.

c) On a $\mathbf{r}(t) = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$, a, b, c sont des constantes.
Le vecteur de vitesse est

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$$

et sa grandeur est

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}|| &= \sqrt{a^2e^{2t} + b^2e^{2t} + c^2e^{2t}} = \sqrt{e^{2t}(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= e^t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Le vecteur accélération est

$$\mathbf{a}(t) = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$$

On remarque que $\mathbf{r}$(t)=$\mathbf{v}$(t)=$\mathbf{a}$(t).

La trajectoire

On note que $\mathbf{r} = e^t(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})$ et on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite dans l'espace :en posant disons $h = e^t, \mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ on obtient :

$$\mathbf{r} = h\mathbf{u}$$

qui donne la droite qui passe par l'origine et avec le vecteur directeur $\mathbf{u}$. Comme h ne prend que des valeurs positives, on obtient plutôt la demi-droite qui part de l'origine et qui pointe dans la direction $\mathbf{u}$.

d) On a $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos(e^t)\mathbf{i} + e^{-t}\sin(e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$
Le vecteur vitesse est

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[-e^{-t}\cos(e^t) - e^{-t}\sin(e^t)e^t\right]\mathbf{i} \\
&\qquad + \left[-e^{-t}\sin(e^t) + e^{-t}\cos(e^t)\cdot e^t\right]\mathbf{j} \\
&\qquad - e^t\mathbf{k} \\
&= \left[-e^{-t}\cos(e^t) - \sin(e^t)\right]\mathbf{i} \\
&\quad + \left[-e^t\sin(e^t) + \cos(e^t)\right]\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}
\end{aligned}$$

et sa grandeur est

$$\begin{aligned}
||\mathbf{v}|| &= \left[e^{-2t}\cos^2(e^t) + 2e^{-t}\cos(e^t)\sin(e^t) + \sin^2(e^t)\right. \\
&\quad + \left. e^{-2t}\sin^2(e^t) - 2e^{-t}\sin(e^t)\cos^2(e^t) + e^{2t}\right]^{1/2} \\
&= \sqrt{e^{-2t} + 1 + e^{2t}}
\end{aligned}$$

Le vecteur accélération est

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[e^{-t}\cos(e^t) + \sin(e^t) - \cos(e^t)\cdot e^t\right]\mathbf{i} \\
&\qquad + \left[e^{-t}\sin(e^t) - \cos(e^t) - \sin(e^t)\cdot e^t\right]\mathbf{j} \\
&\qquad - e^t\mathbf{k} \\
&= \left[(e^{-t} - e^t)\cos(e^t) + \sin(e^t)\right]\mathbf{i} \\
&\quad + \left[(e^{-t} - e^t)\sin(e^t) - \cos(e^t)\right]\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}
\end{aligned}$$

La trajectoire
On note que

$$\begin{aligned}
||r(t)|| &= \sqrt{e^{-2t}\cos^2(e^t) + e^{-2t}\sin^2(e^t) + e^{2t}} \\
&\geq \sqrt{e^{2t}} \\
&\geq e^t
\end{aligned}$$

Donc la particule s'éloigne de l'origine avec le temps. Considérons les équations paramétriques des coordonnées

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}\cos(e^t) \\
y(t) &= e^{-t}\sin(e^t) \\
z(t) &= -e^t
\end{aligned}$$

On voit que la troisième composante z devient négative de façon exponentielle avec le temps. On voit aussi que la projection de la courbe sur le plan de x, y (c'est-à-dire en « oubliant » z) donne une spirale qui converge vers l'orgine. (voir la figure en annexe)

On peut donc dire que la trajectoire est une spirale qui s'enroule autour de l'axe des z dans la direction des z négatifs. (voir la figure en annexe)

5.1.2

$$x = t^3, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 6t, \qquad t = \text{secondes}$$

15 minutes $= 15 \cdot 60 = 900$ secondes
distance = longueur de l'arc correspondant à l'intervalle [0,900]

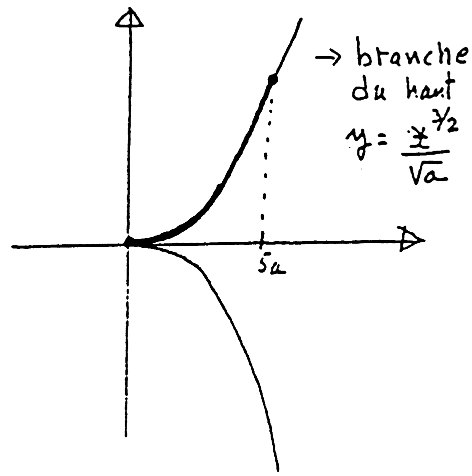
$$\begin{aligned}
&= \int_0^{900} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \\
&= \int_0^{900} \sqrt{(3t^2)^2 + (6t)^2 + 6^2}dt = \int_0^{900} \sqrt{9t^4 + 36t^2 + 36}dt \\
&= \int_0^{900} \sqrt{(3t^2 + 6)^2}dt = \int_0^{900} (3t^2 + 6)dt = \left[t^3 + 6t\right]_0^{900} \\
&= (900)^3 + 6 \cdot 900 = 729\ 000\ 000 + 5400 = 729\ 005\ 400.
\end{aligned}$$

5.1.3

a) On a la courbe $ay^2 = x^3$, disons $a > 0$. Sur la branche du haut on a $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}$ et en utilisant la formule du numéro 5.1.6 on obtient :

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{5a} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2} dx \\
&= \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9}{4}\frac{x}{a}}dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{5a} \sqrt{4a + 9x}dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[(4a + 9x)^{3/2}\right]_0^{5a} \\
&= \frac{335a}{27}.
\end{aligned}$$

N.B. On peut aussi utiliser la paramétrisation $x = at^2,\ y = at^3$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{5}]$.

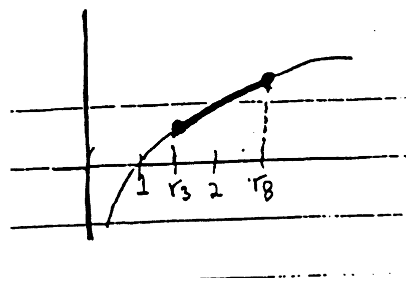


b) On connaît bien la cycloïde $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

Chaque arc est de la même longueur, correspondant à un intervalle du paramètre de longueur 2π. On peut prendre $[0, 2\pi]$. On a $x'(t) = a(1 - \cos t), y'(t) = a \sin t$.

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos(t)))^2 + (a\sin(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(t)}\,dt \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\,dt. \quad \text{Or on sait que } \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta), \text{ainsi} \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8a.
\end{aligned}
$$

c) $y = \log x$ entre $x = \sqrt{3}$ et $x = \sqrt{8}$



$$\begin{aligned} s &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx \\ &= \left[\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \\ &= 1+\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

5.1.4

a) $x = 3\mathrm{ch}(2t), \quad y = 3\mathrm{sh}(2t), \quad z = 6t, t \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(6\mathrm{ch}(2t))^2+(6\mathrm{ch}(2t))^2+6^2}dt \\ &= \int_0^{\pi} 6\sqrt{\mathrm{sh}^2(2t)+\mathrm{ch}^2(2t)+1}dt \\ &= \int_0^{\pi} 6\sqrt{\mathrm{ch}^2(2t)+\mathrm{ch}^2(2t)}dt \\ & \quad \text{(en utilisant } \mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{sh}^2(u)=1\text{)} \\ &= 6\int_0^{\pi} \sqrt{2}\mathrm{ch}(2t)dt = 6\sqrt{2}\left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{sh}(2\pi) \end{aligned}$$

b) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad z = e^t, \quad t \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^\pi \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{(e^t \cos tt - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + \cos t)^2 + (e^t)^2} dt \\
&= \int_0^\pi e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1} dt \\
&= \int_0^\pi e^t \sqrt{\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + cos^2 t + 1} dt \\
&= \int_0^\pi e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3}(e^\pi - 1)
\end{aligned}$$

5.1.5

On a $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ des vecteurs constants, $w > 0$ une constante et $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos(wt) + \dfrac{\mathbf{v}_0}{w} \sin(wt)$.

$\boxed{1}$ **A vérifier** : $\mathbf{r}''(t) = -w^2 \mathbf{r}, \mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0, \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$

En effet,

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \cos(0) + \frac{\mathbf{v}_0}{w} \sin(0) = \mathbf{r_0}.$$

Aussi,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_0(-w \sin(wt)) + \mathbf{v}_0 \cos(wt)$$

de sorte que

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_0(-w \sin(0)) + \mathbf{v}_0 \cos(0) = \mathbf{v}_0.$$

D'autre part on a

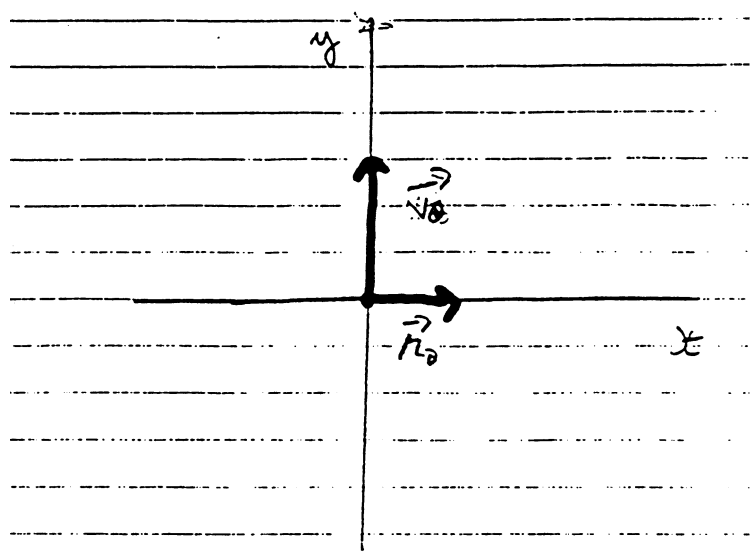
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t) &= \mathbf{r}_0(-w^2 \cos(wt)) + \mathbf{v}_0(-w \sin(wt)) \\
&= -w^2 \left[\mathbf{r}_0 \cos(wt) + \frac{\mathbf{v}_0}{w} \sin(wt)\right] \\
&= -w^2 \mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Nous avons bien vérifié les trois relations.

$\boxed{2}$ **La trajectoire**

On peut d'abord noter que $\mathbf{r}$ est toujours une combinaison linéaire des vecteurs donnés $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$, de sorte que la *trajectoire se trouve dans le plan déterminé par ces deux vecteurs.* Comme $|\cos(wt)| \leq 1$, $|\sin(wt)| \leq 1$, quel que soit t, on voit aussi que la trajectoire se trouve à l'intérieur du cercle de rayon $||\mathbf{r}_0 + ||\mathbf{v}_0||$ centré à l'origine dans ce plan.

Si $\mathbf{r}_0$ *est perpendiculaire à* $\mathbf{v}_0$: en se reportant directement dans le plan déterminé par $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$ on a disons



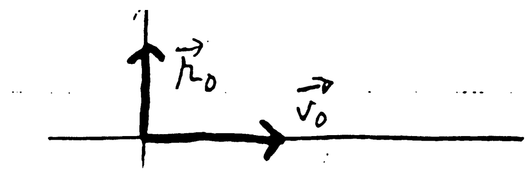
Posons $a = ||\mathbf{r}_0||$, $b = \dfrac{||\mathbf{v}_0||}{w}$.

Alors l'équation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos(wt) + \dfrac{\mathbf{v}_0}{w} \sin(wt)$ se traduit par les équations parmétriques

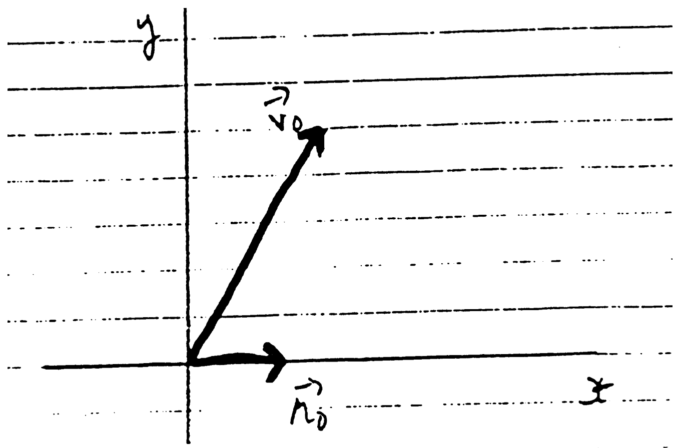
$$\begin{aligned} x &= a\cos(wt) \\ y &= b\sin(wt) \end{aligned}$$

et on reconnaît les équations paramétriques d'une **ellipse** $\left(\text{On a alors } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right)$

On a donc comme trajectoire une ellipse située dans le plan déterminé par $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$, et centrée à l'origine. On obtient un résultat analogue avec l'autre configuration possible :

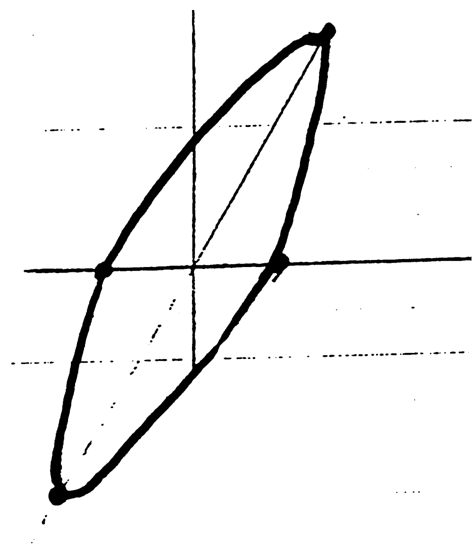


Dans le cas général, en se reportant aussi dans le plan déterminé par $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$, disons



On peut tracer quelques points et utiliser le fait que cos, sin sont des fonctions périodiques pour conclure qu'on obtient une courbe fermée, une espèce d'ovale comme ci-dessous.

On peut décrire la trajectoire comme un ovale contenu dans le plan déterminé par $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$.



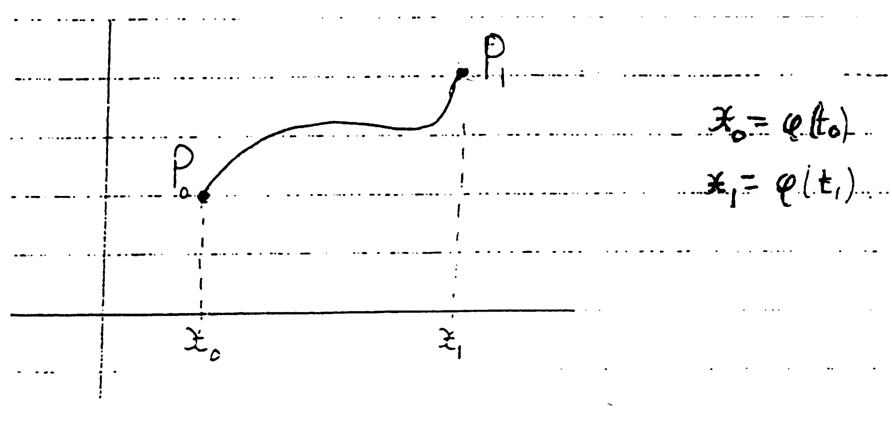
5.1.6

$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$

a) On sait que

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^1}dt$$

où $s =$ longueur de l'arc sur la courbe qui relie le point $P_0 = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ au point $P_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1))$



Considérons le changement de variable $x = \varphi(t)$.

$$\text{On obtient} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t)\ dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}{(\varphi'(t))^2}} \varphi'(t)\ dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}{|\varphi'(t)|} \varphi(t)\ dt, \text{disons } \varphi'(t) \geq 0 \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\ dt \\
&= s
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right) \\
&= \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}
\end{aligned}$$

5.1.7

Il suffit de vérifier l'identité suivante, pour tous vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}$

$$(*) \qquad ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 = ||\mathbf{A}\times\mathbf{B}||^2$$

Disons $\mathbf{A} a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ cette identité se traduit par

$$\begin{aligned}
& (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
= \ & (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_1b_3-a_3b_1)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2.
\end{aligned}$$

qu'on peut vérifier en développant de chaque côté.

On vérifie l'identité $(*)$ plus rapidement en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| &= ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \cos\varphi \\
||\mathbf{A}\times\mathbf{B}|| &= ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \sin\varphi
\end{aligned}$$

où φ est l'angle entre les deux vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

En effet on obtient

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 &= |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2 = ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 \cos^2\varphi \\ ||\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}||^2 &= ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 \sin^2\varphi\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + ||\mathbf{A}\times\mathbf{B}||^2 &= ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 \\ ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 &= ||\mathbf{A}\times\mathbf{B}||^2;\end{aligned}$$

on a obtenu $(*)$.

5.1.8

On utilise la formule de la courbure pour les courbes gauches.

$$K = \frac{\sqrt{[(x')^2+(y')^2+(z')^2][(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2] - [x'x''+y'y''+z'z'']}}{\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\right)^3}$$

a) $x(t) = e^t,\ y(t) = e^{-t},\ z(t) = t\sqrt{2}$.
On a $x'(t) = e^t,\ x''(t) = e^t,\ y'(t) = -e^{-t},\ y''(t) = e^{-t},\ z'(t) = \sqrt{2},\ z''(t) = 0$.
On obtient

$$\begin{aligned}K &= \frac{\left(\left[e^{2t}+e^{-2t}+2\right]\left[e^{2t}+e^{-2t}\right] - \left[e^{2t}-e^{-2t}\right]\right)^{1/2}}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{3/2}} \\ &= \frac{\left(e^{4t}+1+1+e^{-4t}+2e^{2t}+2e^{-2t}-e^{4t}+2-e^{-4t}\right)^{1/2}}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{3/2}} \\ &= \frac{\left(4+2(e^{2t}+e^{-2t})\right)^{1/2}}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{3/2}} = \sqrt{2}\,\frac{(2+e^{2t}+e^{-2t})^{1/2}}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{e^{2t}+e^{-2t}+2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4\mathrm{ch}^2(t)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{ch}^2(t)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}\end{aligned}$$

b) $x(t) = e^{-t}\sin t,\ y(t) = e^{-t}\cos t,\ z(t) = e^{-t}$
On a

$$\begin{array}{ll} x'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, & x''(t) = -2e^{-t}\cos t \\ y'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, & y''(t) = 2e^{-t}\sin t \\ z'(z) = -e^{-t}, & z''(t) = e^{-t} \end{array}$$

$$K = \frac{(A\ B - C^2)^{1/2}}{A^{3/2}}$$

où

$$\begin{aligned} A &= (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2 + (-e^{t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t})^2 = 3e^{-2t} \\ B &= (-2e^{-t}\cos t)^2 + (2e^{-t}\sin t)^2 + (e^{-t})^2 = 5^{-2t} \\ C &= (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)(-2e^{-t}\cos t) \\ &\quad + (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)(2e^{-t}\sin t) + (-e^{-t}e^{-t}) \\ &= -3e^{-2t} \end{aligned}$$

D'où

$$K = \frac{\left(3e^{-2t}\cdot 5e^{-2t} - (-3e^{-2t})^2\right)^{1/2}}{(3e^{-2t})^{3/2}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}\,\frac{e^{-2t}}{e^{-3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{t}.$$

5.1.9

On peut noter que le vecteur $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ est toujours un vecteur tangent et donc que le vecteur tangent unitaire (c.-à-d. de longueur 1) est donné par $\dfrac{1}{||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$. On le notera $\boldsymbol{\sigma}$.

a) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}[\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}] \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \\ ||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^2 &= 1 + t^2 + t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\|^2 &= 1+4t^2 \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= t+2t^3 \end{aligned}$$

La courbure :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|^2\,\|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\|^2-\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}}{\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|^3} \\ &= \frac{\left[(1+t^2+t^4)(1+4t^2)-(t+2t^3)^2\right]^{1/2}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}} \\ K &= \frac{\left[1+4t^2+t^2+4t^4+t^4+4t^6-(t^2+4t^4+4t^6)\right]^{1/2}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}} \\ &= \frac{(1+4t^2+t^4)^{1/2}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}} = \sqrt{\frac{1+4t^2+t^4}{(1+t^2+t^4)^3}} \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+(\sin t)\mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{i}+2\mathbf{j}+(\cos t)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{5+\cos^2 t}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}) \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\sin(t)\mathbf{k} \\ \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|^2 &= 5+\cos^2(t) \\ \|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\|^2 &= \sin^2(t) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\sin t\cos t \\ K &= \frac{\left[\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|^2\|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\|^2-\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}}{\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|^3} \\ K &= \frac{\left[(5+\cos^2(t))\sin^2(t)-\sin^2(t)\cos^2(t)\right]^{1/2}}{(5+\cos^2 t)^{3/2}} \\ K &= \frac{5|\sin(t)|}{(5+\cos^2(t))^{3/2}} \end{aligned}$$

c) On a

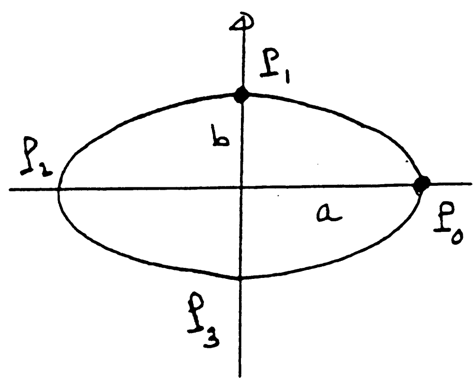
$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\cos t - t\sin(t))\mathbf{i} + (\sin(t) + t\cos(t))\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\sin(t) - (\sin(t) + t\cos(t))\mathbf{i} + (\cos(t) + \cos(t) - t\sin(t))\mathbf{j} \\
&= (-2\sin(t) - t\cos(t))\mathbf{i} + (2\cos(t) - t\sin(t))\mathbf{j} \\
||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^2 &= (\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 1 \\
&= 2 + t^2 \\
||\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}||^2 &= (-2\sin(t) - t\cos(t))^2 + (2\cos(t) - t\sin(t))^2 \\
&= 4 + t^2 \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= (\cos(t) - t\sin(t))(-2\sin(t) - t\cos(t)) \\
&\quad + (\sin(t) + t\cos(t))(2\cos(t) - t\sin(t)) \\
&= t \\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\left[(\cos(t) - t\sin(t))\mathbf{i} + (\sin(t) + t\cos(t))\mathbf{j} + \mathbf{k}\right] \\
K &= \frac{\left[||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^2\,||\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}|| - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}}{||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^3} \\
&= \frac{\left[(2+t^2)(4+t^2) - t^2\right]^{1/2}}{(2+t^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(8 + 5t^2 + t^4)^{1/2}}{(2+t^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

d) On a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= e^t\cos(t)\mathbf{i} + e^t\sin(t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (e^t\cos(t) - e^t\sin(t))\mathbf{i} + (e^t\sin(t) + e^t\cos(t))\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} \\
||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^2 &= (e^t\cos(t) - e^t\sin(t))^2 + (e^t\sin(t) + e^t\cos(t))^2 + e^{2t} \\
&= 3e^{2t} \\
||\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}||^2 &= 5e^{2t} \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= 3e^{2t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \\
K &= \frac{\left[||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^2 \, ||\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}|| - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 \right]^{1/2}}{||\frac{d\mathbf{r}}{dt}||^3} \\
K &= \frac{\left[3e^{2t} \cdot 5e^{2t} - 9e^{4t}\right]^{1/2}}{\sqrt{3}e^t} \\
K &= \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{\sqrt{3}e^t} \\
K &= \sqrt{2}e^t
\end{aligned}
$$

5.1.10



$\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + b\sin(t)\mathbf{j}$, $a > b$.

a) Par symétrie la longueur de l'ellipse est 4 fois la longueur de la portion de l'ellipse située dans le premier quadrant. On a

$$
\begin{aligned}
\text{longueur de l'ellipse} &= 4 \cdot \text{longueur de l'arc } \overset{\frown}{P_0P_1} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt
\end{aligned}
$$

Et notons qu'on a

$$
a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t) = a^2(1 - \cos^2(t)) + b^2\cos^2(t)
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2(t) \\
&= a^2(1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})\cos^2(t)) \\
&= a^2(1 - k^2\cos^2(t)) \\
\text{où } k &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (\frac{b^2}{a^2} < 1, \text{ car } a > b)
\end{aligned}
$$

De sorte que

$$
\begin{aligned}
4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt &= 4\int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - k^2\cos^2(t)}\, dt \\
&= 4a\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1 - k^2\sin^2(t')}\, dt', \\
&\quad \text{en posant } t = t' + \pi/2
\end{aligned}
$$

ce qui fait le lien avec la remarque qui accompagne la question.

b) On peut tout de suite remarquer que, d'après le dessin, on peut *deviner* que la courbure est minimale aux sommets de l'ellipse sur le petit axe, c'est-à-dire en P_1 et P_3, et que la courbure est maximale aux sommets de l'ellipse sur le grand axe, c'est-à-dire en P_0 et P_2. Nous allons *vérifier cette hypothèse par calcul.*

Calculons d'abord la courbure le long de la courbe. Il est commode de noter qu'on obtient une expression un peu plus simple pour calculer la courbure dans le cas des courbes planes.

$$
K = \frac{\mid \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \mid}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a\sin t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t \\
\frac{d^2t}{dt^2} &= -a\cos t \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t
\end{aligned}
$$

D'où

$$
K = \frac{\mid ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t) \mid}{[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)]^{3/2}} = \frac{ab}{[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)]^{3/2}}
$$

La courbure le long de l'ellipse est une fonction du paramètre t. On peut étudier les minimums et maximums par les méthodes que vous connaissez (points critiques, dérivée seconde etc.). Cependant, un examen plus attentif permet de faire les observations suivantes.

1) $K(t)$ est maximum lorsque $[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}$ est minimum et cette dernière fonction et minimum lorsque $a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)$ est minimum.
2) $K(t)$ est minimum lorsque $[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}$ est maximum et cette dernière fonction est maximum lorsque $a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)$ est maximum.
3) En utilisant les calculs déjà faits on peut noter que

$$\begin{array}{rcl} a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t) & = & a^2(1 - k^2 \cos^2(t)), \\ & \leq & a^2, \text{ car } 0 \leq 1 - k^2 \cos^2 t \leq 1 \text{ quel que soit } t. \end{array}$$

Aussi

$$\begin{array}{rcl} a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t) & = & a^2 \sin^2(t) + b^2(1 - \sin^2(t)) \\ & = & b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(t) \\ & \leq & b^2, \text{ car } (a^2 - b^2) \sin^2 t \geq 0 \\ & & \quad \text{quelque soit } t, \text{ (car } a > b). \end{array}$$

Ainsi, on a pour toutes les valeurs de t

$$b^2 \leq a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t) \leq a^2$$

Or les valeurs b^2 et a^2 sont atteintes (pour un tour autour de l'ellipse)

$$\begin{array}{llrrl} \text{si} & t = 0 \ , & a^2 \sin^2 0 \ + & b^2 \cos^2 0 & = b^2 \\ \text{si} & t = \pi \ , & a^2 \sin^2 \pi \ + & b^2 \cos^2 \pi & = b^2 \\ \text{si} & t = \pi \ , & a^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \ + & b^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} & = a^2 \\ \text{si} & t = \frac{3\pi}{2}, & a^2 \sin^2 \frac{3\pi}{2} \ + & b^2 \cos^2 \frac{3\pi}{2} & = a^2 \end{array}$$

On en conclut que $a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)$ est

$$\begin{array}{lll} \text{maximum} & \text{si} & t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou } t = \frac{3\pi}{2} \\ \text{minimum} & \text{si} & t = 0 \quad \text{ou } t = \pi \end{array}$$

D'où la courbure $K(t)$ est

$$\begin{array}{lll} \text{minimum} & \text{si} & t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2} \\ \text{maximum} & \text{si} & t = 0, \quad t = \pi \end{array}$$

donc la courbure $K(t)$ est

$$\begin{array}{ll} \text{minimum en} & P_1, P_3 \\ \text{maximum en} & P_0, P_2 \end{array}$$

tel que prévu !

5.1.11

On a les demi-droites suivantes (voir la figure en annexe) qu'on veut relier de façon « lisse » par une courbe donnée par un polynôme $f(x)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Le polynôme doit satisfaire les six contraintes suivantes :

$$\begin{array}{rlrll} f(-1) = & -1, & f(1) = & 1 & \text{(passage par les points)} \\ f'(-1) = & 0 \;\;, & f'(1) = & 0 & \text{(inclinaison des tangentes)} \\ f''(-1) = & 0 \;\;, & f''(1) = & 0 & \text{(courbure)} \end{array}$$

et un polynôme de degré 5 devrait suffire, en effet

$$\begin{aligned} \text{posons } f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \text{ On cherche } a, b, c, d, e. \\ \text{On a } f'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 \\ f''(x) &= 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \end{aligned}$$

À partir des contraintes données, on obtient les six équations suivantes :

$$\begin{array}{rlr} f(-1) = -1 & \text{donne} & a - b + c - d + e - f = -1 \\ f(1) = 1 & \text{donne} & a + b + c + d + e + f = 1 \\ f'(-1) = 1 & \text{donne} & b - 2c + 3d - 4e + 5f = 0 \\ f'(1) = 0 & \text{donne} & b + 2c + 3d + 4e + 5f = 0 \\ f''(-1) = 0 & \text{donne} & 2c - 6d + 12e - 20f = 0 \\ f''(1) = 0 & \text{donne} & 2c + 6d + 12e + 20f = 0 \end{array}$$

On a donc un système d'équations linéaires de 6 équations à 6 inconnues. En utilisant la méthode de votre choix pour résoudre, on trouve

$$a = 0, \quad b = \frac{15}{8}, \quad c = 0, \quad d = \frac{-5}{4}, \quad e = 0, \quad f = \frac{3}{8}$$

Le polynôme cherché est

$$f(x) = \frac{15}{8}x - \frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^5$$

(voir la figure en annexe)

5.1.12

On doit relier de façon « lisse » les bouts de courbes suivants : (voir la figure en annexe)

Nous alons relier directement $(-1, 1)$ à $(0, 1)$. (On pourrait aussi chercher à relier $(-1, 1)$ à $(0, 1)$). On veut relier ces courbes par une courbe donnée par une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-1, 0]$. La fonction $f(x)$ doit satisfaire les six contraintes suivantes :

$$\begin{array}{rlrll} f(-1) = & 1\ , & f(0) = & 1 & \text{(passage par les points)} \\ f' = & 0\ , & f'(0) = & 0 & \text{(inclinaison des tangentes)} \\ f'' = & 0\ , & |f''(0)| = & 1 & \text{(courbure)} \end{array}$$

Pour avoir la bonne concavité en $(0, 1)$ on prend $f''(0) = -1$.

N.B. $\left(\sqrt{1-x^2}\right)''(0) = -1$

N.B. De $\frac{|f''(0)|}{\sqrt{1+(f'(0))^2}} = 1 =$ courbure du cercle et $f'(0) = 0$, on tire $|f''(0)| = 1$.

Comme on l'a vu, un polynôme de degré 5 devrait faire l'affaire

$$\begin{array}{lrl} \text{Posons} & f(x) = & a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \\ \text{On a} & f'(x) = & b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 \\ & f''(x) = & 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \end{array}$$

À partir des contraintes, on obtient les six équations suivantes :

$$\begin{array}{rlcrl} f(-1) = & 1 & ; & a - b + c - d + e - f = & 1 \\ f(0) = & 1 & ; & a = & 1 \\ f'(-1) = & 0 & ; & b - 2c + 3d - 4e + 5f = & 0 \\ f'(0) = & 0 & ; & b = & 0 \\ f''(-1) = & 0 & ; & 2c - 6d + 12e - 20f = & 0 \\ |f''(0)| = & 1 & ; & 2c = & -1 \end{array}$$

On a un système de 6 équations linéaires à 6 inconnues. En utilisant la méthode de votre choix pour résoudre on trouve

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = \frac{-1}{2}, \quad d = \frac{-3}{2}, \quad e = \frac{-3}{2}, \quad f = \frac{-1}{2}$$

Le polynôme cherché est donc

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5$$

(voir la figure en annexe)

5.1.13

À voir : une courbe le long de laquelle la courbure est toujours nulle est obligatoirement une droite.

Considérons une courbe paramétrée et supposons que la courbure K est toujours nulle. Il s'agit de voir que cette courbe est une droite. Or, la courbure est nulle, quelle que soit la paramétrisation utilisée pour la calculer.

L'expression la plus simple pour la courbure est donnée lorsqu'on utilise la paramétrisation par la longueur d'arc. En effet,

$$K(s) = ||\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}||, \text{ où } \boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \text{ est le vecteur tangent}$$

Ainsi, on a $||\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}|| = 0$, pour toute valeur s. D'où $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \mathbf{0}$, pour tout s.

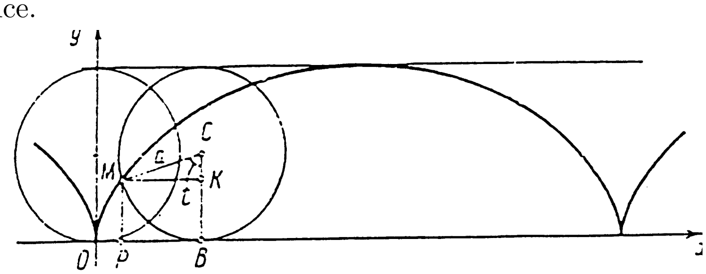
Donc $\boldsymbol{\sigma}$ doit être un vecteur constant.

Disons $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u}$, c'est-à-dire $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}_1 = (a, c, e)$ pour tout s.

Ceci entraîne que $\mathbf{r} = s\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, où $\mathbf{u}_2 = (b, d, f)$ disons (en intégrant) c'est-à-dire $\mathbf{r}(t) = (as+b)\mathbf{i} + (cs+d)\mathbf{j} + (es+f)\mathbf{k}$ qui donne bien une droite (sous forme paramétrique).

5.1.14

On appelle *cycloïde* la courbe engendrée par un point situé sur une circonférence qui roule sans glisser sur une droite. Supposons que le point mobile M de la circonférence se trouve au début du mouvement à l'origine des coordonnées. Déterminons les coordonnées du point M après que la circonférence ait pivoté d'un angle t. Désignons par a le rayon de cette circonférence.



On voit que

$$x = OP = OB - PB,$$

mais comme la circonférence roule sans glisser

$$OB = \overset{\frown}{MB} = at, \; PB = MK = a \sin t.$$

Donc

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

Or,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

On obtient les équations paramétriques

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi$$

Quand t varie de 0 à 2π, le point M décrit un arc de la cycloïde.

Éliminons le paramètre t de ces équations pour trouver un lien direct entre y et x. La fonction $y = a(1 - \cos t)$ admet sur le segment $0 \leq t \leq \pi$ une fonction inverse :

$$t = \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right).$$

En substituant on obtient :

$$x = a \ \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - a \ \sin\left(\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)\right)$$

ou

$$x = a \ \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}, \ \text{pour } 0 \leq x \leq \pi a.$$

On voit directement sur la figure que pour $\pi a \leq x \leq 2\pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \ \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

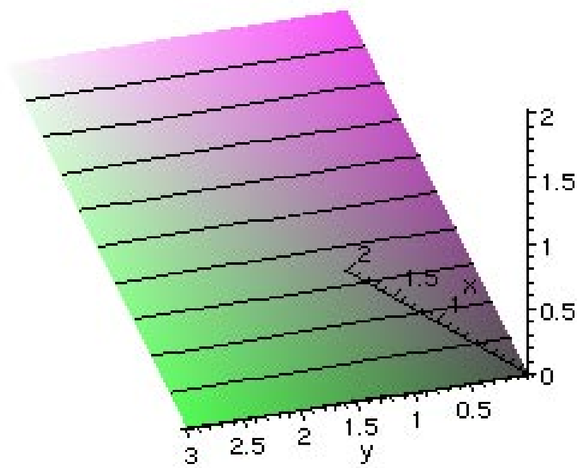
N.B. La fonction $x = a(t - \sin t)$ admet une fonction inverse qui ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires.

5.2 Dérivées partielles

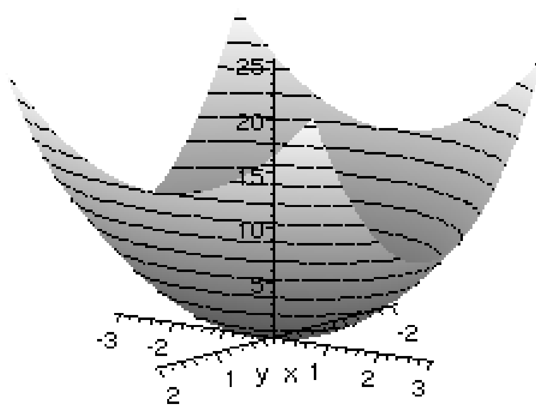
5.2.1

Les surfaces représentatives sont tracées avec les courbes de niveau

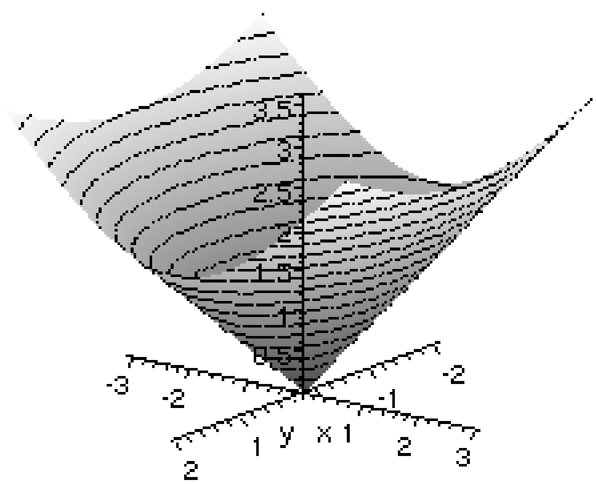
a) $f(x,y) = x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3$
plot3$d(x, x = 0..2, y = 0..3,$style = patchcontour, axes = normal)



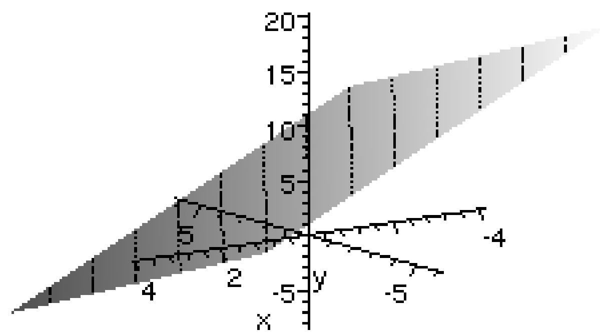
b) $f(x,y) = 4x^2 + y^2, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad -3 \leq y \leq 3$
plot3d($4 * x\hat{}2 + y\hat{}2, x = 0 - 2..2, y = -3..3$, style = patchcontour, axes = normal) ;



c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad -2 \le x \le 2, \quad -3 \le y \le 3$
plot3d((x^2+y^2)^(1/2), $x=-2..2, y=-3..3$, style = patchcontour, axes = normal);

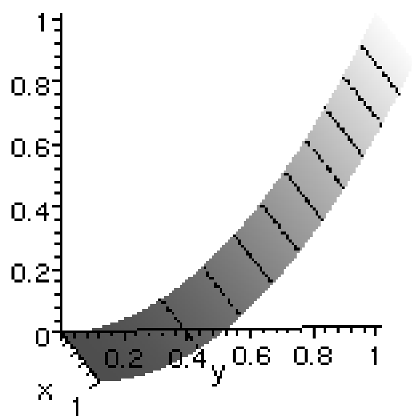


d) $f(x,y) = 6 - x - 2y, \quad -6 \le x \le 6, \quad -y \le y \le 4.$
plot3d($6 - x - 2 * y, x = -6..6, y = -4..4$, style = patchcontour,
axes = normal);

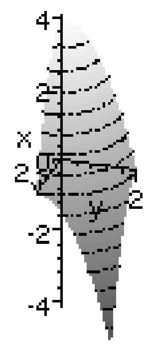


e) $f(x,y) = y^2, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

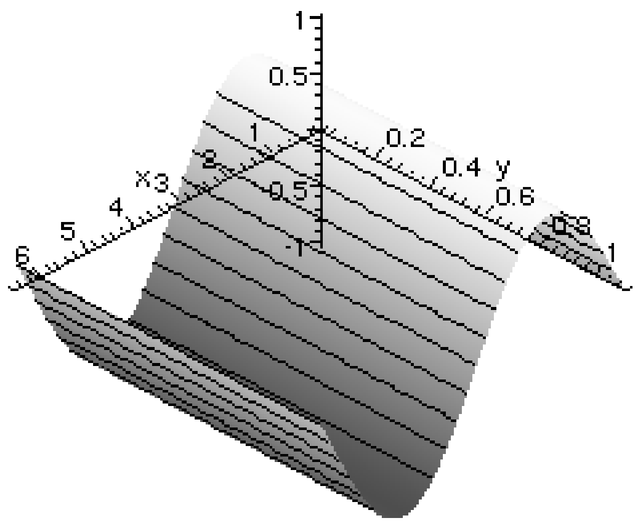
plot3$d(y\hat{}2, x = 0..1, y = 0..1,$ style = patchcontour, axes = normal);



f) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2$
plot3d($4 - x$ˆ$2 - y$ˆ$2, x = 0..2, y = 0..2$, style = patchcontour, axes = normal) ;



g) $f(x, y) = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 6,5, \quad 0 \leq y \leq 1,1$
plot3d(sin(x), $x = 0..6.5, y = 0..1.1$, style = patchcontour,
axes =normal) ;



5.2.2

a) On a la fonction $f(x, y) = x - y$
Les courbes de niveau sont données par la famille de courbe

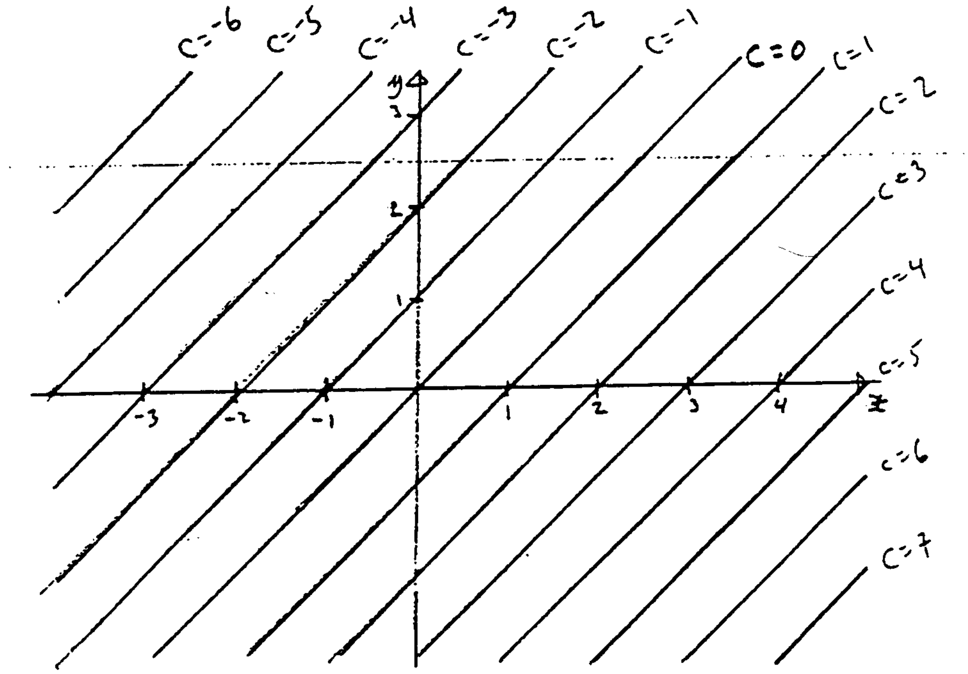
$$x - y = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est définie pour toutes les valeurs de x et y et qu'elle prend toutes les valeurs possibles.

Pour une valeur donnée de c, on a l'équation d'une droite.

On obtient, dans le plan x, y



b) On a la fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

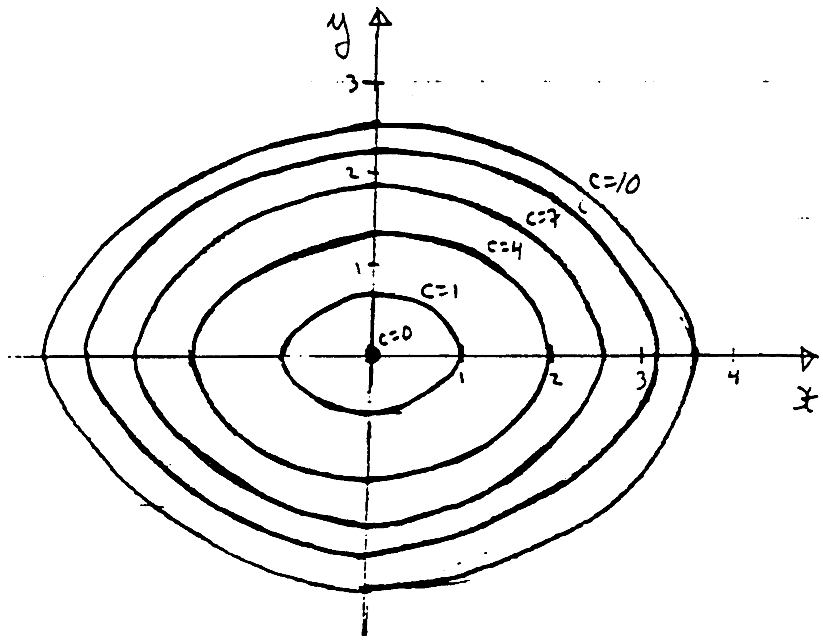
Les courbes de niveau sont données par la famille de courbes

$$x^2 + 2y^2 = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est définie pour toutes les valeurs de x, y et que la fonction ne prend que des valeurs positives ou nulle.

Pour $c = 0$, on obtient un point (0,0).
Pour $c > 0$, on obtient l'équation d'une ellipse $\left(\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/2} = 1\right)$



c) On a la fonction $f(x, y) = xy$

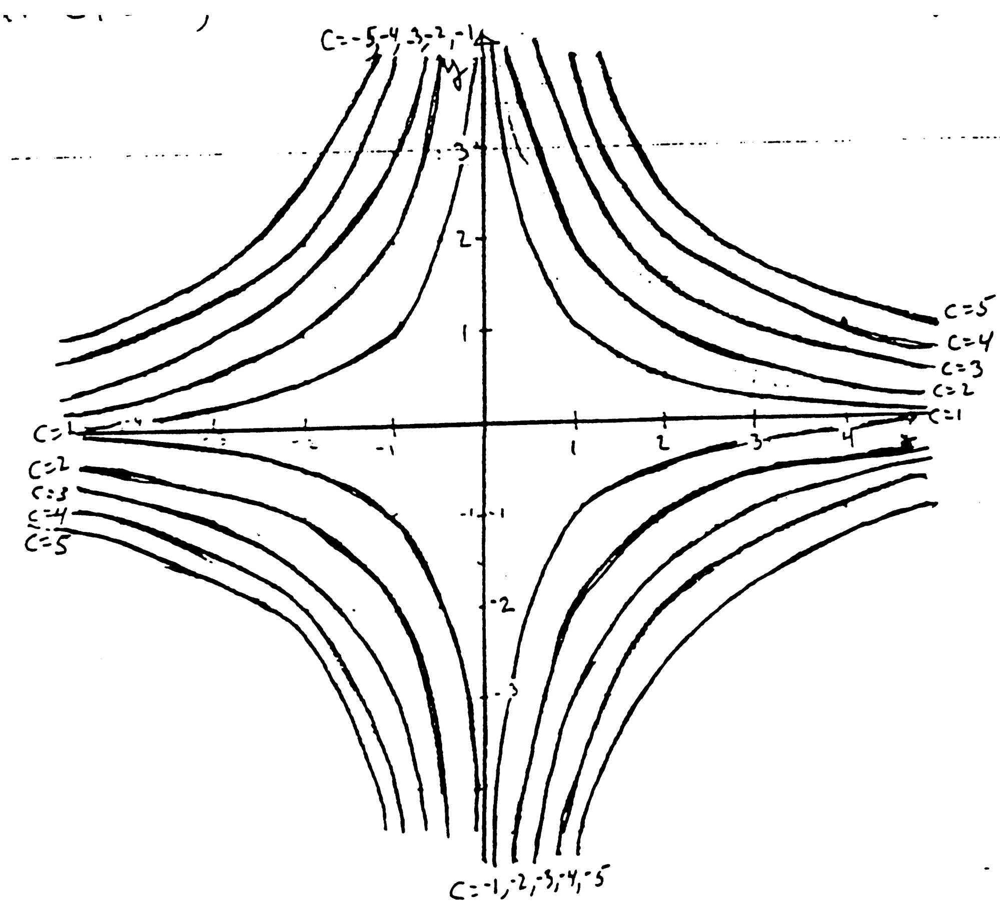
Les courbes de niveau sont données par la famille de courbes

$$xy = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est définie pour toutes les valeurs de x, y et qu'elle prend toutes les valeurs possibles.

Pour $c = 0$, on a $xy = 0$ qui donne la paire de droites des axes de coordonnées $x = 0$ (axe des y), $y = 0$ (axe des x). Pour $c \neq 0$, on a l'équation d'une hyperbole équilatère.



d) On a la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$

Les courbes de niveau sont données par la famille de courbes

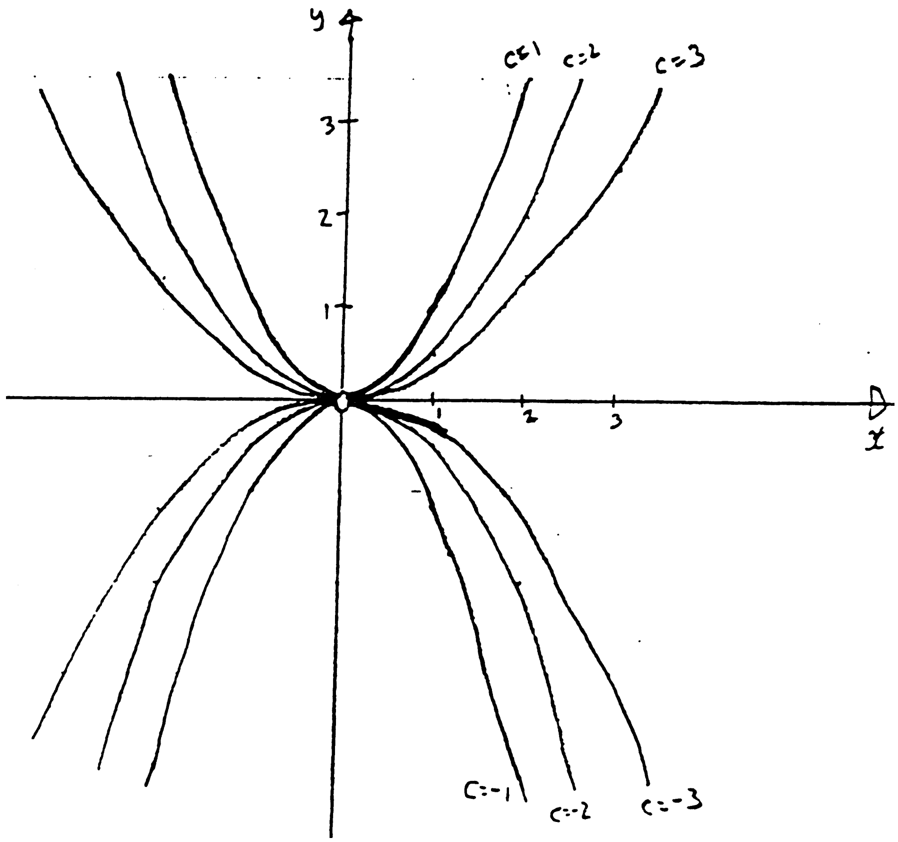
$$\frac{x^2}{y} = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est bien définie par les valeurs x, y avec $x \neq 0$, et qu'elle prend toutes les valeurs possibles.

Pour $c = 0$, on obtient la droite $x = 0$

Pour $c \neq 0$, on a l'équation $y = \dfrac{x^2}{c}$ d'une parabole.



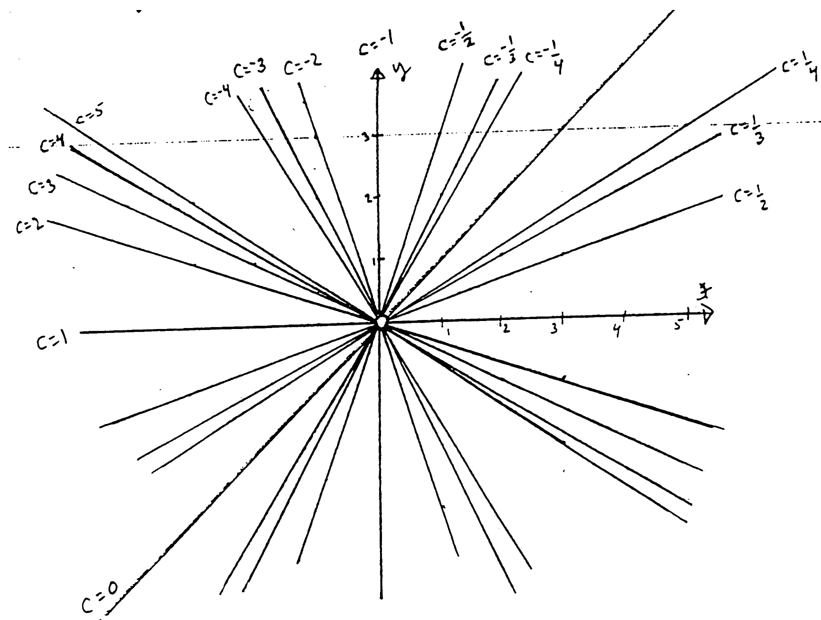
e) On a la fonction $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

Les courbes de niveau dont données par la famille de courbes

$$\frac{x-y}{x+y} = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est définie pour les valeurs x, y telles que $x \neq y$ et que la fonction prend toutes les valeurs possibles. Pour chaque valeur de c on obtient l'équation d'une droite $(c-1)x + (c+1)y = 0$



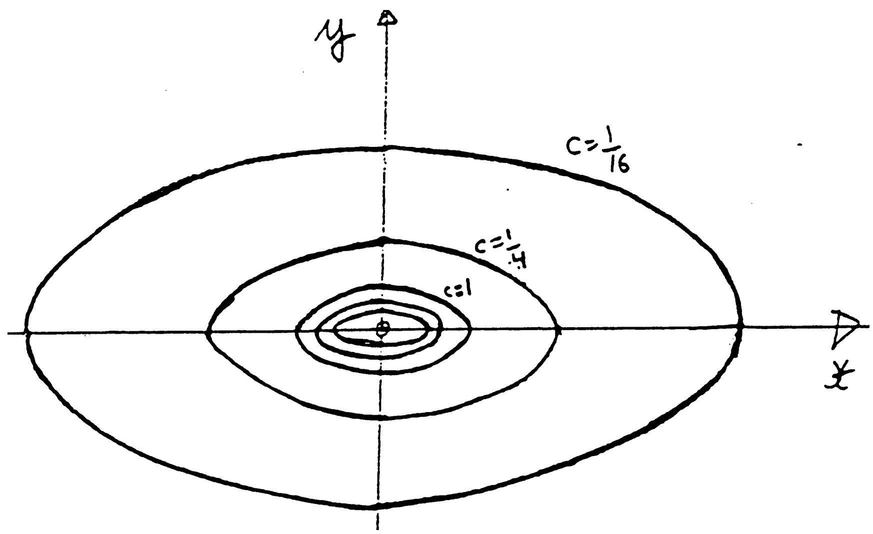
f) On a la fonction $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2}$

Les courbes de niveau sont données par la famille de courbes

$$\frac{1}{x^2 + 4y^2} = c$$

où c est une constante.

On note que la fonction est définie pour toutes les valeurs de x, y sauf à l'origine et que la fonction ne prend que des valeurs positives (> 0). Pour chaque valeur de $c, c > 0$, on obtient l'équation d'une ellipse $\dfrac{x^2}{1/c} + \dfrac{y^2}{1/4c} = 1$.



5.2.3

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy + x^2 = 2\cdot(-1) + 2^2 = 2$

N.B. La fonction $xy + x^2$ est continue

b) On considère $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$

On remarque que $\dfrac{y^3}{x^2+y^2} = y \cdot \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ et que $0 \leq \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$

Donc $|\dfrac{y^3}{x^2+y^2} \leq |y|$, quels que soient x, y (pas nuls en même temps)

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ et on en conclut que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$

c) On considère $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x,y)}{x^2+y^2}$ Si on s'approche de (0,0) le long de la droite $y = x$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0) y=x} \frac{\sin(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\left(\text{N.B. On sait que } \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1\right).$

Mais si on s'approche de (0,0) le long de la droite $y = 2x$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0) y=2x} \frac{\sin xy}{x^2y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^2}{x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \cdot \frac{\sin 2x^2}{5x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin 2x^2}{2x^2} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

On en conclut que la limite considérée n'existe pas puisque $\dfrac{\sin(x,y)}{x^2+y^2}$ ne s'approche pas d'une valeur déterminée lorsqu'on s'approche de (0,0).

5.2.5

Pour chacune des fonctions $f(x, y)$, on doit résoudre le système d'équation en x, y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

a) On a

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^3y^2(a-x-y), \ a \text{ est une constante.} \\
&= ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3ax^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(3a-4x-3y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = x^3y(2a-2x-3y)
\end{aligned}$$

On doit résoudre

$$\begin{cases} x^2y^2 \ (3a-4x-3y) = 0 \\ x^3y \ (2a-2x-3y) \ = 0 \end{cases}$$

La 1^{re} équation donne $x = 0$ ou $y = 0$ ou $3a - 4x - 3y = 0$.
La 2^{e} équation donne $x = 0$ ou $y = 0$ ou $2a - 2x - 3y = 0$.
On a donc les points :

$$\begin{array}{ll}
(0,y) & , \ \text{quel que soit } y \\
(x,0) & , \ \text{quel que soit } x \\
\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right) & ,
\end{array}$$

N.B. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$ est la solution de $3a - 4x - 3y = 0$ et $2a - 2y - 3x = 0$.

b) On a $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y - \frac{1}{x^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 2y - \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

On doit résoudre

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x + 2y - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2y - 1 &= 0 \\ xy^2 + 2y^3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2y - xy^2 - 2y^3 &= 0 \\ 2\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} &= 0. \end{aligned}$$

En posant $t = \frac{x}{y}$, on a $2t^3 + t^2 - t - 2 = 0$.
On vérifie que $t = 1$ est la seule racine réelle.
D'où $\frac{x}{y} = 1$, c'est-à-dire $x = y$.
En remplaçant ci-dessus on obtient $2x^3 + x^3 - 1 = 0, 3x^3 - 1 = 0, x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Ainsi on a un seul point : $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

c) On a $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x) + \cos(x+y)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(y) + \cos(x+y)\end{aligned}$$

On doit résoudre

$$\begin{cases} \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \cos(y) + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

On tire $\cos(x) = \cos(y)$, d'où $\sin(y) = \pm\sin(x)$.

En remplaçant, on a $\cos(x)+\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)=0$
$\underline{\text{Pour } \sin(y)=\sin(x)}$
On a

$$\begin{aligned} \cos(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x) &= 0 \\ 2\cos^2(x)+\cos(x)-1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\cos(x)=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x)=-1$$

et on a alors

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \text{ou} \quad x=\pi+2\pi k,$$

où k est un entier relatif et
$y=x+2\pi t$
(car $\cos(x)=\cos(y)$ et $\sin(x)=\sin(y)$)
Et on obtient les points

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi t\right) & , \text{ quels que soient les entiers relatifs } k,t. \\ \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k, -\frac{\pi}{3}+2\pi k+2\pi t\right) & , \\ (\pi+2\pi k, \pi+2\pi k+2\pi t) & , \end{array}$$

$\underline{\text{Pour } \sin(y)=-\sin(x)}$
On a

$$\begin{aligned} \cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x) &= 0 \\ \cos(x) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{d'où} & x = & \pi+2\pi k \text{ , où } k \text{ est une entier relatif} \\ \text{et} & y = & \pi+2\pi s \text{ , où } s \text{ est un entier relatif} \end{array}$$

Et on obtient les points

$$(\pi+2\pi k,\ \pi+2\pi t), \text{quels que soient les entiers } k,t.$$

N.B. Si on se restreint à $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$,$0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ on n'a que le point $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

d) On a $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x)\sin(y)\sin(x+y)+\sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(x)\cos(y)\sin(x+y)+\sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \end{aligned}$$

On doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(x)\sin(y)\sin(x+y)+\sin(x)\sin(y)\cos(x+y)=0\\ \sin(x)\cos(y)\sin(x+y)+\sin(x)\sin(y)\cos(x+y)=0\end{array}\right.$$

On obtient

$$\cos(x)\sin(y)\sin(x+y)-\sin(x)\cos(y)\sin(x+y)=0$$

$$\sin(y-x)\sin(x+y)=0$$

$$\begin{array}{lrlcrl}\text{d'où} & \sin(y-x)= & 0 & \text{ou} & \sin(x+y)= & 0\\ & y-x= & k\pi & \text{ou} & x+y= & k\pi,\ \text{où } k \text{ est un entier relatif}\\ & y= & x+k\pi & \text{ou} & y= & -x+k\pi\end{array}$$

<u>Pour $y=x+k\pi$</u>

On a

$$\cos(x)\sin(x+k\pi)\sin(2x+k\pi)+\sin(x)\sin(x+k\pi)\cos(2x+k\pi)=0$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x)\sin(2x)+\sin^2(x)\cdot\cos(2x) &= 0\\ \frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\sin(2x)+\frac{1-\cos(2x)}{2}\cdot\cos(2x) &= 0\end{aligned}$$

On obtient

$$2\cos^2(2x)-\cos(2x)-1=0$$

d'où

$$\cos(2x)=1 \quad \text{ou} \quad \cos(2x)=-\frac{1}{2}$$

et on en conclut

$$x=t\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}+t\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+t\pi,\ \text{où } t \text{ est un entier relatif}$$

Ce qui donne les points

$$(t\pi, t\pi+k\pi)$$

$$\left(\frac{\pi}{3}+t\pi, \frac{\pi}{3}+t\pi+k\pi\right)$$

$$\left(\frac{2\pi}{3}+t\pi, \frac{2\pi}{3}+t\pi+k\pi\right)$$

quels que soient les entiers relatifs k, t

<u>Pour $y = -x + k\pi$</u>

On peut mettre le système sous la forme

$$\begin{cases} \sin(y)\ \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x)\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

On a

$$\sin(x)\sin(x - 2x + 2k\pi) = 0$$

$$\sin(x) \cdot -\sin(x) = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 0 \\ x &= t\pi, \text{ où } t \text{ est un entier relatif} \end{aligned}$$

Ce qui donne les points

$$(t\pi, -t\pi + k\pi), \text{ quels que soient les entiers relatifs } k, t.$$

N.B. Si on se restreint à $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi$ on n'a que les points $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), (0,0), (\pi, \pi)$.

5.2.6

b) On a

$$z = \frac{x^2y^2}{x+y}$$

À voir

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2xy^2(x+y) - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x+y)^2} = \frac{xy^2(x+2y)}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x^2y^2 + 2yx^3}{(x+y)^2} \text{ (N.B. Par symétrie entre } x \text{ et } y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(2xy^2 + 2y^3)(x+y)^2 - (x^2y^2 + 2xy^3) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2y^4}{(x+y)^4} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{(2xy^2+6yx^2)(x+y)^2-(x^2y^2+2yx^3)2(x+y)}{(x+y)^4} \\
&= \frac{2xy(x^2+3xy+y^2)}{(x+y)^3}
\end{aligned}
$$

Ainsi on a

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{x\cdot 2y^4}{(x+y)^3}+\frac{y\cdot 2xy(x^2+3xy+y^2)}{(x+y)^3} \\
&= \frac{2\cdot xy^2[y^2+x^2+3xy+y^2]}{(x+y)^3} \\
&= \frac{2\cdot xy^2(x+y)(x+2y)}{(x+y)^3} \\
&= 2\frac{xy^2(x+2y)}{(x+y)^3} \\
&= 2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

5.2.7

Pour (a) à (e), il s'agit de voir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

et pour (f), il s'agit de voir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

a) On a $f(x,y)=A(x^2-2y^2)+Bxy$, où A,B sont des constantes

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2Ax+By \quad , \quad & \frac{\partial f}{\partial y} &= -2Ay+Bx \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2A \quad , \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2A.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2A-2A=0$$

b) On a $f(x,y)=3x^2y-y^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2-3y^2\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y-6y=0$$

c) On a $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2x(x^2+y^2)^2-(-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}\\ &= \frac{2x(x^2+y^2)[-(x^2+y^2)-2(-x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x(x^2+y^2)^2-(-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}+\frac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}=0$$

d) On a $f(x,y)=\ \mathrm{arct}g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}\frac{-y}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

e) On a $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

(par symétrie entre x et y)

Ainsi
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2x^2+\partial y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

f) On a $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^{2/3}}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-(-2x)\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\\
&= \frac{2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}[-(x^2+y^2+z^2)+3x^2]}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\\
&= \frac{2(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2(-x^2+2y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2(-x^2-y^2+2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

(par symétrie)

Ainsi
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{2(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{2(-x^2+2y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\
&\quad+\frac{2(-x^2-y^2+2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0
\end{aligned}$$

5.2.8

On a $u(x,y), v(x,y)$ qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\qquad (*)$$

et dont les dérivées secondes sont continues.

À voir u et v sont harmoniques, c'est-à-dire
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-\partial u}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

à cause des équations de Cauchy-Riemann.

Puisque les dérivées secondes de u et v sont toutes continues on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

par le théorème sur les dérivées partielles mixtes.
D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

tel que voulu.

5.2.9

c) On a $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ainsi pour $x = 1,\ y = 0,\ dx = \frac{1}{2},\ dy = \frac{1}{4}$
on obtient

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0)} \cdot \frac{1}{4} \\ df &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} \\ df &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5.2.10

On utilise l'approximation vue au cours pour une fonction $f(x,y)$ près d'un point (a,b), ou $g(x,y,z)$ près de (a,b,c)

$$\begin{aligned} f(a+\triangle x, b+\triangle y) &\approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}\triangle x+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}\triangle y \\ g(a+\triangle x, b+\triangle y, c+\triangle z) &\approx g(a,b,c)+\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)}\triangle x \\ &\quad +\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)}\triangle y+\frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)}\triangle z \end{aligned}$$

a) On a $f(x,y)=\sin(\pi xy+\log(y))$ qu'on veut estimer en $(0,01;1,05)$
Utilisons l'approximation ci-dessus près du point $(a,b)=(0,1)$, avec $\triangle x=0,01, \quad \triangle y=0,05$.
N.B. : $0,01=0+0,01=a+\triangle x \;\; 1,05=1+0,05=b+\triangle y$
On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(\pi xy+\log(y))\cdot \pi y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(\pi xy+\log(y))\cdot\left(\pi x+\frac{1}{y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,1)} &= \cos(0)\cdot\pi=\pi, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=\cos(0)\cdot(0+1)=1 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} f(0,01;1,05) &\approx f(0,1)+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\cdot 0,01+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\cdot 0,05 \\ f(0,01;1,05) &\approx \sin(0)+\pi\cdot 0,01+1\cdot 0,05 \\ f(10,01;1,05) &\approx \frac{\pi}{100}+0,05, \text{ ce qui donne environ } 0,0814 \end{aligned}$$

N.B. Une calculatrice donne directement $f(0,01;1,05)\approx 0,084685$.

b) On a $f(x,y)=\dfrac{24}{x^2+xy+y^2}$ qu'on veut estimer en $(2,1;1,8)$.
Utilisons l'approximation ci-dessus près du point (2 ;1) avec $\triangle x = 0,1, \; \triangle y=0,8$.
N.B. 2,1 = 2 + 0,1 1,8 = 1+ 0,8
On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-24(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-24(2y+x)}{(x^2+xy+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,1)} &= \frac{-24\cdot 5}{49}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(2,1)} = \frac{-24\cdot 4}{49} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(2,1;1,8) & \approx & f(2,1)+\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot 0,1+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot 0,8 \\ f(2,1;1,8) & \approx & \dfrac{24}{7}+\dfrac{-24\cdot 5\cdot 0,1}{49}+\dfrac{-24\cdot 4}{49}\cdot 0,8 \\ f(2,1;1,8) & \approx & \dfrac{24}{49}(7-0,5-3,2) \\ f(2,1;1,8) & \approx & \dfrac{24}{49}\cdot 3,3 \\ f(2,1;1,8) & \approx & 1,6 \end{array}$$

N.B. Une calculatrice donne directement $f(2,1;1,8) \approx 2,099$

c) On a $f(x,y,z)=\sqrt{x+2y+3z}$ qu'on veut estimer en (1,9 ; 1,8, 1,1)
Utilisons l'approximation à l'aide de la différentielle comme ci-dessus, mais pour les fonctions de trois variables :

$$\begin{array}{rcl} f(a+\triangle x,b+\triangle y,c+\triangle z) & = & f(a,b,c)+df(a\cdot b,c,\triangle x,\triangle y,\triangle z) \\ & = & f(a,b,c)+\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}\triangle x \\ & & +\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}\cdot\triangle y+\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}\cdot\triangle z \end{array}$$

Utilisons cette approximation près de $(a,b,c)=(1,1,1)$ avec $\triangle x = 0,9$, $\triangle y = 0,8$, $\triangle z = 0,1$
On a $1,9=1+0,9=a+\triangle x$, $1,8=1+0,8=b+\triangle y$, $1,1=1+0,1=c+\triangle z$

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y+3z}}, & & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{1,1,1}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}, & & \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{1,1,1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{3}{\sqrt{x+2y+3z}}, & & \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{1,1,1}=\dfrac{3}{2\sqrt{6}} \end{array}$$

On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(1,9;1,8;1,1) & \approx & f(1,1,1)+\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}\cdot 0,9+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}\cdot 0,8 \\ & & +\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}\cdot 0,1 \\ f(1,9;1,8;1,1) & \approx & \sqrt{6}+\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\cdot 0,9+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0,8+\dfrac{3}{2\sqrt{6}}\cdot 0,1 \\ f(1,9;1,8;1,1) & \approx & \dfrac{1}{2\sqrt{6}}(2\cdot 6+0,9+2\cdot 0,8+0,3)=\dfrac{14,8}{2\sqrt{6}}\approx 3,0 \end{array}$$

N.B. Une calculatrice donne directement $f(1,9;1,8;1,1) \approx 2,9664$.

5.2.11

1) On a $z = 3x^4 - xy + y^3$, qu'on considère en $M = (1,2)$. La direction donnée est la suivante : (voir la figure en annexe) ; d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 12x^3 - y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -x + 3y^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{s}}z\Big|_{(1,2)} &= \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} \cdot \cos 60° + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} \cos 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5 + 11\frac{\sqrt{3}}{2}(\approx 14,5)\end{aligned}$$

2) On a $z = 5x^2 - 3x - y - 1$, qu'on considère en $M = (2,1)$. La direction donnée est la suivante : (voir la figure en annexe) Les "cosinus directeurs" sont donnés par

$$\left(\frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2}}, \frac{5-1}{\sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2}}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

D'autre part

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x - 3, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

Ainsi

$$D_{\mathbf{s}}z\Big|_{(2,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)} \cdot \frac{4}{5} = 17 \cdot \frac{3}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = \frac{47}{5} = 9,4$$

3) On a une fonction quelconque $f(x,y)$.
   a) La direction indiquée est la bissectrice du premier quadrant. (voir la figure en annexe)

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{s_1}}f\Big|_p &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p \cos 45° + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p \cos 45° \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p\right).\end{aligned}$$

b) La direction indiquée est la suivante : (voir la figure en annexe)

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{s_1}} f\Big|_p &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p \cos 180^\circ + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p \cos(-90^\circ) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p \cdot 0 \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p
\end{aligned}$$

4) On a $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$. Notons que

$$\begin{aligned}
\text{grad } f &= (3x^2 + 6x + 4y)\mathbf{j} + (4x + 2y)\mathbf{j} \\
\text{grad } f\Big|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}\right)} &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 0
\end{aligned}$$

Comme la dérivée, dans une direction donnée, au point $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$, est donnée par la projection de grad $f\Big|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}\right)}$ dans cette direction, la dérivée obtenue sera toujours nulle.

5.2.12

On a $T(x,y) = \dfrac{100\ xy}{x^2 + y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$. On considère le point $P = (2,1)$.

a) T change le plus dans la direction du gradient. (voir la figure en annexe)

$$\begin{aligned}
\text{grad } T\Big|_P &= \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_P \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_P \mathbf{j} \\
\text{On a } \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{100y^3 - 100x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{100x^3 - 100y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \\
\text{grad } T\Big|_P &= -12\mathbf{i} + 24\mathbf{j}
\end{aligned}$$

b) La valeur absolue de la dérivée dans la direction du gradient en un point donné, ici P, est donnée par la norme (ou la longueur) du gradient en ce point.
On trouve

$$||\text{grad } T\Big|_P|| = ||(-12, 24)|| = \sqrt{720}\ (\approx 27)$$

c) On a la direction de 60° avec l'axe x (voir la figure en annexe)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{s}}T\Big|_{(2,1)} &= \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(2,1)} \cdot \cos 60^\circ + \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(2,1)} \cdot \cos 30^\circ \\ &= (-12)\cdot\frac{1}{2} + 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -6 + 12\sqrt{3} \quad (\approx 15) \end{aligned}$$

5.2.13

On veut étudier les extremums de ces fonctions. On étudie les points qui annulent les dérivées partielles. Ces points ont déjà été trouvés dans un exercice précédent (exercice 2.5).

1) On a $z = x^3y^2(a-x-y)$, a est une constante.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2y^2(3a-4x-3y) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3y(2a-2x-3y)$$

On avait trouvé les points suivants $\left(\text{qui annulent } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ $(0,y)$, quel que soit y ; $(x,0)$ quel que soit x ; $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{3}\right)$.

Utilisons les tests vus en classe. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2xy^2(3a-6x-3y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3(2a-2x-6y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= x^2y(6a-8x-9y) \end{aligned}$$

Pour les points $(0,y)$ et $(x,0)$ on a

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,0)}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(x,0)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(x,0)} = 0$$

et on ne peut rien conclure.

Pour $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{3}\right)$, $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(\frac{a}{2},\frac{a}{3})} &= \frac{-a^4}{9} < 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|^2_{(\frac{a}{2},\frac{a}{3})} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(\frac{a}{2},\frac{a}{3})} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(\frac{a}{2},\frac{a}{3})} &= \left(\frac{-a^4}{12}\right)^2 - \left(\frac{-a^4}{9}\right)\cdot\left(\frac{-a^4}{8}\right) \\ &= \frac{-a^8}{144} < 0 \end{aligned}$$

Donc $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{3}\right)$ donne un maximum local.

2) On a $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-\frac{1}{x^2}\quad ,\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-\frac{1}{y^2}$$

On avait trouvé un seul point qui annule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$

Utilisons les tests vus en classe.

On a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2+\frac{2}{x^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+\frac{2}{y^3}\quad ,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3})}=2+2\cdot 3=8>0$$

$$\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(\sqrt[3]{3})}\right)^2-\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3}}\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3}}=0-8\cdot 8=-64<0$$

On peut conclure que z est minimum (localement) en

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

3) On a $z=\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$ sur le domaine $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2},0\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x)+\cos(x+y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos(y)+\cos(x+y)$$

Avec la restriction sur les valeurs de x,y seul le point $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ annule les dérivées $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Utilisons les tests vus en classe.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\sin(x)-\sin(x+y)\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin(y)-\sin(x+y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\sin(x+y)\\
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})}&=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0
\end{aligned}$$

$$\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})}\right)^2 - \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})} \cdot \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3})$$
$$= \frac{-9}{4} < 0$$

On en conclut que z possède un maximum local en $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{3}$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

N.B. Il est instructif de faire tracer à l'ordinateur la surface représentative de cette fonction pour « voir » le maximum.

4) On a $z = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur le domaine $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos(x)\sin(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \sin(x)\cos(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y)
\end{aligned}$$

Avec la restriction sur les valeurs de x, y seuls les points

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right),\ (0,0),\ (\pi,\pi)$$

annulent $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

On utilise les tests vus au cours.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -2\sin(x)\sin(y)\sin(x+y) + 2\cos(x)\sin(y)\cos(x+y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2\sin(x)\sin(y)\sin(x+y) + 2\cos(y)\sin(x)\cos(x+y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2\sin(x+y)\cos(x+y)
\end{aligned}$$

Notons que pour $P = (0,0)$ ou (π,π), $\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_P\right)^2 - \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P = 0$ et les tests ne permettent pas de conclure.

Pour $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ on a

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})} = -2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1}{2}\\
&= \sqrt{3}>0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)} &= \sqrt{3}\ ,\ \text{par symétrie}\\
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)} &= 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^2-\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)} &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\\
&= \frac{-9}{4}<0
\end{aligned}
$$

On en conclut que z possède un minimum local en $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{2\pi}{3}$ pour $0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$.
Pour $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ on a

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} &= -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&\quad +\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1}{2}\\
&= -\sqrt{3}<0\\
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} &= -\sqrt{3}\\
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} &= 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2-\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot-\sqrt{3}\\
&= \frac{-9}{4}<0
\end{aligned}
$$

On en conclut que z possède un maximum local en $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{3}$ pour $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

N.B. Il est intéressant de faire tracer à l'ordinateur la surface représentative de cette fonction pour « voir » les extremums.

5.2.14

On a $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

a) On cherche les points (x,y) où le gradient de f est nul, autrement dit tels que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \cdot -x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \cdot -y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{aligned}$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ exactement quand $x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ exactement quand $y = 0$. On a que grad f s'annule en (0,0), et c'est le seul point.

b) D'après a) seul (0,0) peut donner un extremum. On note que $f(x,y) > 0$, quels que soient x, y. On note aussi que lorsque x, y sont grands, $f(x,y)$ est petit et qu'en fait $f(x,y)$ peut être aussi petit que l'on veut en choisissant x et y assez grands. Ainsi, f prend des valeurs positives aussi petites que l'on veut sans jamais être nulle et on en conclut que f ne peut pas avoir de minimum (absolu).

N.B. On peut aussi raisonner comme suit : $f(0,0) = \frac{1}{2\pi}$ et, par exemple $f(1,1) = \frac{1}{2\pi e} < \frac{1}{2\pi}$; comme (0,0) est le seul candidat pour donner un minimum, on en conclut que f ne peut avoir de minimum.

On a déjà noté que $f(0,0) = \frac{1}{2\pi}$. Or dès que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, c'est-à-dire dès que $(x,y) \neq (0,0)$,

on a

$$x^2 + y^2 > 0$$

d'où

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} < 1$$

et

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} < \frac{1}{2\pi}$$

c'est-à-dire

$$f(x,y) < f(0,0).$$

On en conclut que (0,0) donne un maximum de la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

et que cette valeur maximum est $\frac{1}{2\pi}$.

N.B. La surface représentative de cette fonction permet de bien voir le maximum en (0,0). Vérifiez-le à l'aide de l'ordinateur.

5.2.15

On a $Q(C,T) = C^2 + CT + \left(\frac{1}{2}\right)T^2 - 10C - 7T + 60$

$$\text{grad } Q = \frac{\partial Q}{\partial C}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial T}\mathbf{j} = (2C + T - 10)\mathbf{i} + (C + T - 7)\mathbf{j}$$

Les points où s'annule le gradient sont les solutions du système

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 0, \frac{\partial Q}{\partial T} = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2C + T - 10 &= 0 \\ C + T - 7 &= 0 \end{aligned} \quad \text{, ou encore} \quad \begin{aligned} 2C + T &= 10 \\ C + T &= 7 \end{aligned}$$

On ne trouve comme solution que $C = 3, T = 4$.

Sachant que Q possède un minimum et qu'il n'y a qu'un candidat, on l'a trouvé : il y a donc un minimum au point (3,4) et la valeur correspondante est $Q(3,4) = 31$.

5.2.16

a) On doit avoir $\frac{1600}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 400$, d'où $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 4$, ou encore $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$, ce qui est l'équation de la surface d'une sphère centrée à l'origine et de rayon 4.

b) On cherche la direction du gradient de E

$$\begin{aligned}\text{grad } E &= \frac{\partial E}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial E}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial E}{\partial z}\ \mathbf{k} = \frac{-1600x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \mathbf{i}+ \\ &\quad \frac{-1600y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \mathbf{j}+\frac{-1600z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \mathbf{k}\end{aligned}$$

En chacun des points $P(x_0, y_0, z_0)$ de a) on a $x_0^2+y_0^2+z_0^2=16$.
Ainsi, en ces points on a

$$\begin{aligned}\text{grad } E\Big|_P &= \frac{-1600x_0}{64}\ \mathbf{i}+\frac{-1600y_0}{64}\ \mathbf{j}+\frac{-1600z_0}{64}\ \mathbf{k} \\ \text{grad } E\Big|_P &= -25x_0\ \mathbf{i}-25y_0\ \mathbf{j}-25z_0\ \mathbf{k}\end{aligned}$$

$\text{grad } E\Big|_P$ pointe vers le centre de la sphère. (voir la figure en annexe)

5.2.17

On a

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Le long de la parabole $y=x^2$, avec $x\neq 0$, on a

$$f(x,y)=f(x,x^2)=\frac{2x\cdot x^2}{x^2+(x^2)^2}=\frac{2x^3}{x^2+x^4}=\frac{2x}{1+x^2}$$

La limite cherchée est donc

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

5.2.18

On veut calculer la distance de l'origine au plan d'équation $x+2y+2z=3$

a) Solution géométrique
Cette distance sera donnée par un segment sur la droite qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire au plan donné. Cette droite est, sous forme paramétrique,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= t(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) \\ &= t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}\end{aligned}$$

Cette droite coupe le plan pour la valeur du paramètre t telle que

$$t + 2 \cdot 2t + 2 \cdot 2t = 3$$

c'est-à-dire

$$9t = 3$$

d'où

$$t = \frac{1}{3}$$

Le point $\frac{1}{3}\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,\mathbf{k}$ sur le plan est donc le plus près de l'origine et sa distance à l'origine donne la distance entre l'origine et le plan. Cette distance est donc

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

La distance est de 1 unité

b) Optimiser une fonction de 2 variables sans contrainte
On veut minimiser $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec la contrainte $x + 2y + 2z = 3$ ce qui revient à minimiser $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ avec la contrainte $x + 2y + 2z = 3$.
Isolons x dans $x + 2y + 2z = 3$

$$x = 3 - 2y - 2z$$

alors

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (3 - 2y - 2z)^2 + y^2 + z^2 \\ &= 9 + 4y^2 + 4z^2 - 12y - 12z + 8yz + y^2 + z^2 \\ &= 9 + 5y^2 + tz^2 - 12y - 12z + 8yz. \end{aligned}$$

Il suffit de minimiser cette fonction des variables y, z.
Disons

$$g(y, z) = 9 + 5y^2 + 5z^2 - 12y - 12z + 8yz$$

Trouvons les points qui annulent son gradient, c'est-à-dire tel que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial z} = 0,\ \text{on a } \frac{\partial g}{\partial y} = 10y - 12 + 8z,\ \frac{\partial g}{\partial z} = 10z - 12 + 8y$$

Le système

$$\begin{aligned} 10y + 8z - 12 &= 0 \\ 8y + 102 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

possède l'unique solution $y = \frac{2}{3},\ z = \frac{2}{3}$. Puisqu'on sait que le minimum cherché existe et qu'il y a un seul candidat, ce doit être ce point.
Revenant à $f(x, y, z)$, on a un minimum en

$$x = 3 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{2}{3}.$$

La distance minimum est atteinte en ce point et est égale à l'unité.

c) Optimiser une fonction de 3 variables avec le multiplicateur de Lagrange

Comme en b), on veut minimiser $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec la contrainte $x + 2y + 2z = 3$, ce qui revient à minimiser la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ avec la contrainte $x + 2y + 2z - 3 = 0$

Considérons la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda(x + 2y + 2z - 3) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda x + 2\lambda y + 2\lambda z - 3\lambda \end{aligned}$$

Cherchons les points tels que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2\lambda,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y + 2z - 3$$

d'où le système

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + 2\lambda &= 0 \\ 2z + 2\lambda &= 0 \\ x + 2y + 2z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

On peut isoler x, y, z dans les trois premières équations :

$$x = \frac{-\lambda}{2},\ y = -\lambda,\ z = -\lambda$$

et en remplaçant dans la dernière, on obtient

$$-\lambda - 2\lambda - 2\lambda - 3 = 0$$

d'où

$$\lambda = \frac{-2}{3}$$

et donc

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{2}{3}$$

Puisqu'on sait qu'il y a un minimum et qu'on a un seul candidat, le minimum est certainement atteint en ce point. En revenant à la distance, on obtient la distance minimale égale à

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \text{ unité}$$

5.2.19

On a la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$

On veut trouver la valeur maximum et minimum avec la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Les points (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ forment la surface d'une sphère centrée à l'origine et de rayon 1.

Si on considère x, y, z, on voit que le maximum sera atteint quand $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Il suffirait donc de considérer les points sur la sphère tels que $z \geq 0$. Ceci donne la relation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. On peut donc remplacer dans $f(x, y, z), f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, et chercher le maximum de cette fonction de deux variables, sans contrainte.

Procédons plutôt par le multiplicateur de Lagrange. Considérons la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ &= x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right) = (1 + 2\lambda x, 1 + 2\lambda y, 1 + 2\lambda z, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Les points (x, y, z, λ) qui annulent grad F sont tels que

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ 1 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $x = \dfrac{-1}{2\lambda} = y = z$. En remplaçant dans la dernière équation, on a

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{3}{4}, \text{ d'où } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Ceci donne deux points parmi lesquels chercher le maximum et le minimum voulu :

$$M_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{et} \quad M_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

On a

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$$

Puisqu'on sait d'avance qu'il y a un minimum et un maximum et qu'on a deux candidats, on est sûr de les avoir trouvés et on a :

la valeur maximum est $\sqrt{3}$, obtenue au point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

la valeur minimum est $-\sqrt{3}$, obtenue au point $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

5.2.20

On veut le point le plus proche de l'origine sur la surface $xy^2z - 2 = 0$. On veut donc le point (x, y, z) qui minimise $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec la contrainte $xy^2z - 2 = 0$.

Ce point sera le même que celui qui minimise $x^2 + y^2 + z^2$ avec la même contrainte $xy^2z - 2 = 0$.

Notons qu'on peut isoler z dans l'équation de la contrainte :

$$z = \frac{2}{xy^2}$$

En remplaçant on a

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{2}{xy^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2y^4}$$

et on peut chercher le minimum de cette fonction de deux variables, sans contrainte.

Utilisons plutôt le multiplicateur de Lagrange. Considérons la fonction auxiliaire

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy^2z - 2)$$

Le minimum cherché se trouve parmi les points qui annulent grad F.

On a

$$\text{grad } F = (2x + \lambda y^2 z,\ 2y + 2\lambda xyz,\ 2z + \lambda xy^2,\ xy^2z - 2)$$

Donc, à résoudre :

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y^2 z &= 0 \\ 2y + 2\lambda xyz &= 0 \\ 2z + \lambda xy^2 &= 0 \\ xy^2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

On a $2y(1 + \lambda xz) = 0$, d'où $1 + \lambda xz = 0$ car x, y, z doivent être tous non nuls (4^e équation) ; on obtient

$$\lambda = \frac{-1}{xz} = \frac{-2x}{y^2z} = \frac{-2z}{xy^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} y^2z &= 2x^2z\ ,\ y^2 = 2x^2 \\ y^2x &= 2z^2x\ ,\ y^2 = 2z^2 \end{aligned}$$

et on a $x = z$ ou $x = -z$.

En remplaçant dans $xy^2z - 2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} x \cdot 2x^2x - 2 &= 0 \quad \text{ou} \quad x \cdot 2x^2(-x) - 2 = 0 \\ 2x^4 - 2 &= 0 \quad \text{ou} \quad -2x^4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Or $-2x^4 - 2 = 0$ ne peut avoir de solution (réelle) ; en particulier ceci exclut $x = -z$ et on a nécessairement $x = z$.

Donc, on doit avoir

$$2x^4 - 2 = 0$$

d'où

$$x^4 - 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

(seules solutions parmi les nombres réels).

On a donc $x = z = 1$ ou $x = z = -1$ et $y = \sqrt{2}$ ou $y = -\sqrt{2}$ ce qui donne les possibilités suivantes :

$$(1, \sqrt{2}, 1),\ (1, -\sqrt{2}, 1),\ (-1, \sqrt{2}, -1),\ (-1, -\sqrt{2}, -1)$$

Ces points appartiennent bien à la surface d'équation $xy^2z - 2 = 0$. On voit qu'ils sont tous à la même distance de l'origine soit 2. Ces quatre points sur la surface d'équation $xy^2z - 2 = 0$ sont donc tous à la même distance de l'origine et sont les plus près de l'origine sur cette surface.

5.2.21

Pour que la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ passe par (1,2,2) on doit avoir $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{4}{c^2} = 1$

On cherche donc à minimiser la fonction

$$V(a, b, c) = 4\pi abc$$

avec la contrainte

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} - 1 = 0$$

N.B. On peut choisir a, b, c positifs.

Utilisons le multiplicateur de Lagrange. On considère la fonction

$$F(a, b, c, \lambda) = 4\pi abc + \lambda \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{grad } F &= \left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c}, \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \\
&= \left(4\pi bc - \frac{2\lambda}{a^3}, 4\pi ac - \frac{8\lambda}{b^3}, 4\pi ab - \frac{8\lambda}{c^3}, \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Les points qui annulent grad F sont les solutions (a, b, c, λ) du système

$$\begin{aligned}
4\pi bc - \frac{2\lambda}{a^3} &= 0 \\
4\pi ac - \frac{8\lambda}{b^3} &= 0 \\
4\pi ab - \frac{8\lambda}{c^3} &= 0 \\
\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} - 1 &= 0
\end{aligned}$$

On a

$$\lambda = 2\pi a^3 bc = \frac{1}{2}\pi ab^3 c = \frac{1}{2}\pi abc^3$$

d'où

$$2a^2 = \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$$

car on a forcément $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$4a^2 = b^2 = c^2$$

et en remplaçant dans la 4^e équation :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2} + \frac{4}{4a^2} - 1 = 0 \ ; \quad \frac{3}{a^2} - 1 = 0 \ ; \quad a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}$$

En prenant a, b, c positifs, on obtient

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{12}$$

Notons que ceci donne certainement un minimum pour

$$V = 4\pi abc$$

car on est sûr qu'un tel minimum existe avec $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.
N.B. La surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ est un « ellipsoïde » centré à l'origine dont les demi-axes sont de longueur a (sur l'axe des x) b (sur l'axe des y) et c (sur l'axe des z), en prenant $a > 0, b > 0, c > 0$. (voir la figure en annexe)

5.2.22

a) On veut optimiser $f(x, y, z) = x$ avec les contraintes $x + y - z = 0$ et $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8 = 0$.

Utilisons les multiplicateurs de Lagrange. On considère la fonction

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + \lambda_1(x + y - z) + \lambda_2(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8)$$

On a

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}\right) \\ &= (1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x, \lambda_1 + 4\lambda_2 y, -\lambda_1 + 4\lambda_2 z, x + y - z, x^2 \\ &\quad + 2y^2 + 2z^2 - 8) \end{aligned}$$

Les points $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ qui annulent grad F sont tels que

$$\begin{aligned} 1+\lambda_1+2\lambda_2 x &= 0 \\ \lambda_1+4\lambda_2 y &= 0 \\ -\lambda_1+4\lambda_2 z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \\ x^2+2y^2+2z^2-8 &= 0 \end{aligned}$$

On a $x = z - y$; $\quad 4\lambda_2(y+z) = 0$
On note qu'on ne peut avoir $\lambda_2 = 0$ (car alors on aurait $\lambda_1 = 0$, d'où 1=0 ce qui est absurde)
donc $y + z = 0$, ou encore $z = -y$
On a donc $z = -y$, $\quad x = -y - y = -2y$. En remplaçant dans la 5^e équation on obtient

$$\begin{aligned} 4y^2+2y^2+2y^2-8 &= 0 \\ 8y^2-8 &= 0 \\ y=1 \text{ ou } y &= -1 \end{aligned}$$

On a donc les points $(-2, 1, -1)$ et $(2, -1, 1)$. Puisqu'on sait que les extremums existent (points d'abcisse maximum et minimum sur une courbe fermée, faites un dessin), on les a trouvés :

l'abcisse maximum est égale à 2 au point (2,-1,1) et
l'abcisse minimum est égale à -2 au point (-2,1,-1)

b) On veut optimiser $f(x, y, z) = x + y^2 z$ avec les contraintes $y^2 + z^2 = 2$ et $z = x$.

En remplaçant $z = x$, on obtient $f(x, y, z) = x + y^2 x$, une fonction de deux variables à optimiser avec la contrainte $y + x^2 = 2$, c'est-à-dire $y^2 + x^2 - 2 = 0$. Utilisons le multiplicateur de Lagrange pour cette fonction de deux variables. On considère la fonction auxiliaire

$$F(x, y, \lambda) = x + y^2 x + \lambda(y^2 + x^2 - 2)$$

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right) = (1 + y^2 + 2x\lambda, 2xy + 2\lambda y, y^2 + x^2 - 2)$$

Les points qui annulent grad F sont tels que

$$\begin{aligned} 1+y^2+2x\lambda &= 0 \\ 2xy+2\lambda y &= 0 \\ y^2+x^2-2 &= 0 \end{aligned}$$

<u>Si $y=0$,</u> alors $x^2-2=0$, $x=\sqrt{2}$ et $\lambda=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$ ou $x=-\sqrt{2}$ et $\lambda=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et on a les points $(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ à considérer.

<u>Si $y\neq 0$,</u> alors $x=-\lambda$, d'où $1+y^2-2x^2=0$, $y^2=2x^2-1$ et en remplaçant dans la 3^{e} équation on obtient $3x^2-3=0$, $x=1$ ou $x=-1$, et on a les points $(-1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$ à considérer.
On a

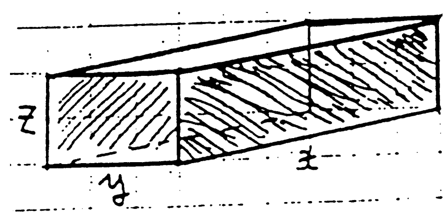
$$f(\sqrt{2},0,\sqrt{2})=\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})=-\sqrt{2}, f(1,1,1)=2,$$

$$f(1,-1,1)=2,\ f(-1,1,-1)=-2,\ f(-1,-1,-1)=-2$$

Puisqu'on sait que les extremums existent on a : le maximum est 2, atteint en (1,1,1) et $(1,-1,1)$, le minimum est -2 atteint en $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$

5.2.23

On a une boîte sans couvercle de volume fixé égal à V.



Posons $x=$ longueur, $y=$ largeur, $z=$ hauteur. Fixons le coût au mètre carré le plus petit à 1 unité. Soit $C(x,y,z)$ le coût de la boîte.

On a

$$C(x,y,z)=2yz+xz+5(xy+xz)=2yz+6xy+5xz$$

D'autre part $xyz=V$

On veut donc minimiser la fonction

$$C(x,y,z)=2yz+bxy+5xz$$

avec la contrainte $xyz-V=0$

Utilisons le multiplicateur de Lagrange. On considère la fonction auxiliaire

$$F(x,y,z\lambda)=2yz+6xy+5xz+\lambda\ (xyz-V)$$

On a

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z},\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right) =$$

$$(6y + 5z + \lambda yz,\ 2z + 6x + \lambda xz,\ 2y + 5x + \lambda xy,\ xyz - V)$$

Les points qui annulent le gradient sont tels que

$$\begin{aligned} 6y + 5z + \lambda yz &= 0 \\ 2z + 6x + \lambda xz &= 0 \\ 2y + 5x + \lambda xy &= 0 \\ xyz - V &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 6xy + 5xz + \lambda xyz &= 0 \\ 2yz + 6yz + \lambda xyz &= 0 \\ 2yz + 5xz + \lambda xyz &= 0 \end{aligned}$$

et

$$5xz = 2yz, \quad 6xy = 2yz$$

Comme on doit avoir $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 5x &= 2y \quad , \quad & 6x &= 2z \\ y &= \frac{5}{2}x \quad , \quad & \text{z} &= 3x \end{aligned}$$

En remplaçant dans $xyz = V$ on a

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{5}{2} \cdot 3x &= V \\ x^3 &= \frac{2V}{15} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{2V}{15}} \end{aligned}$$

On a donc

$$x = \sqrt[3]{\frac{2V}{15}}, \quad y = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{2V}{15}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{2V}{15}}$$

Comme on sait qu'il y a un minimum et qu'il y a un seul candidat, on sait qu'on l'a trouvé.

5.2.24

Soit

$$\varphi(x,y,z),\ \varphi_1(x,yz),\ \varphi_2(x,y,z),\ \psi(x,y,z)$$

des fonctions de trois variables, c, c_1, c_2 des constantes.

1) **À voir** : $\underline{\text{grad } c\varphi = c \text{ grad } \varphi}$:

En effet

$$\frac{\partial(c\varphi)}{\partial x} = c\frac{\partial \varphi}{\varphi x}\ ,\ \frac{\partial(c\varphi)}{\partial y} = c\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}(c\varphi) = c\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Ainsi

$$\text{grad } c\varphi = \left(c\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ c\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ c\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = c \text{ grad } \varphi$$

À voir : $\underline{\text{grad } c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = c_1\text{grad } \varphi_1 + c_2\text{grad } \varphi_2}$

En effet

$$\frac{\partial}{\partial x}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + c_2\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{grad } (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) &= \Big(c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\
&\qquad c_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + c_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big) \\
&= c_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x},\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) + c_2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x},\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right) \\
&= c_1 \text{ grad } \varphi_1 + c_2 \text{ grad}\varphi_2
\end{aligned}$$

À voir : $\underline{\text{grad } (\varphi, \psi) = \varphi\text{grad } \psi + \psi\text{grad } \varphi}$

En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) = \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi) = \varphi\frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi) = \varphi\frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{grad }(\varphi\psi) &= \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\
&= \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\
&= \varphi\text{grad }\varphi+\psi\text{grad }\varphi.
\end{aligned}$$

N.B. Ces résultats sont valables pour des fonctions de n variables en général.

2) On a $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a) <u>grad r</u> :

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

D'où

$$\text{grad } r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y},\ \frac{\partial r}{\partial z}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\frac{1}{r}(x,y,z)$$

En posant

$$\mathbf{R}=(x,y,z)$$

on a

$$\text{grad } r=\frac{1}{r}\mathbf{R}$$

b) <u>grad r^2</u> :

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\quad \frac{\partial r^2}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial r^2}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial r^2}{\partial z}=2z$$

$$\text{grad } r^2=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)=2\mathbf{R}$$

(cf. notation ci-dessus)

c) <u>grad $\frac{1}{r}$</u> :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} &= \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} &= \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
\text{grad } \frac{1}{r} &= \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{-1}{r}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

d) $\underline{\text{grad } f(r)}$: f est une fonction d'une variable
Disons

$$g(x,y,z) = f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \ \frac{\partial g}{\partial y} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}, \ \frac{\partial g}{\partial z} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}$$

Ainsi

$$\text{grad } f(r) = f'(r)\cdot \text{grad } r = f'(r)\cdot\frac{1}{r}\ \mathbf{R}$$

3) **À voir** : $\text{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}$
Disons

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(x,y,z) &= A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k} \\
\mathbf{B}(x,y,z) &= B_1(x,y,z)\mathbf{i} + B_2(x,y,z)\mathbf{j} + B_3(x,y,z)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(x,y,z) + \mathbf{B}(x,y,z) &= [A_1(x,y,z) + B_1(x,y,z)]\mathbf{i} \\
&\quad + [A_2(x,y,z) + B_2(x,y,z)]\ \mathbf{j} \\
&\qquad + [A_3(x,y,z) + B_3(x,y,z)]\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{div}\mathbf{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \\
\text{div}\mathbf{B} &= \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\
\text{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(A_1(x,y,z) + B_1(x,y,z)) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2(x,y,z) \\
&\quad + B_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3(x,y,z) + B_3(x,y,z) \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial z} \\
&= \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

Ceci montre bien que $\text{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}$

4) On veut calculer div $\mathbf{r}$ où $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
On a

$$\begin{aligned} \text{div }\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 1+1+1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

5) On a $\mathbf{A}(x,yz)$ une fonction vectorielle et $\varphi(x,yz)$ une fonction scalaire.
On veut calculer $\text{div}(\varphi\mathbf{A})$.
Disons

$$\mathbf{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi\mathbf{A}(x,y,z) &= \varphi(x,y,z)A_1(x,y,z)\mathbf{i} + \varphi(x,y,z)A_2(x,y,z)\mathbf{j} \\ &\quad + \varphi(x,y,z)A_3(x,y,z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \text{div }\varphi\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x,y,z)A_1(x,y,z)) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(x,y,z)A_2(x,y,z)) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi(x,y,z)A_3(x,y,z)) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_1(x,y,z) + \varphi(x,y,z)\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}A_2(x,y,z) \\ &\quad + \varphi(x,y,z)\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}A_3(x,y,z) + \varphi(x,y,z)\frac{\partial A_3}{\partial z} \\ &= \varphi(x,y,z)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_1(x,y,z) \\ &\quad + \frac{\partial\varphi}{\partial y}A_2(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}A_3(x,y,z) \\ &= \varphi\ \text{div}\mathbf{A} + \text{grad}\varphi\cdot\mathbf{A} \end{aligned}$$

On a donc la formule

$$\text{div }\varphi\mathbf{A} = \varphi\ \text{div}\mathbf{A} + \text{grad }\varphi\cdot\mathbf{A}$$

pour n'importe quelle fonction $\varphi(x,y,z)$ et n'importe quelle fonction vectorielle $\mathbf{A}(x,y,z)$

6) On a

$$
\begin{aligned}
r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\mathbf{c} &= c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{j},\ \text{ un vecteur constant} \\
r\mathbf{c} &= c_1\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i}+c_2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} \\
&\quad + c_3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k} \\
\operatorname{div}(r\mathbf{c}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(c_3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&= \frac{c_1x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{c_2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{c_3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{1}{r}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{r}) \\
\text{où } \mathbf{r}(x,y,z) &= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

7) On a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(x,y,z) &= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \\
\mathbf{A} &= A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k} \\
\mathbf{B} &= B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k},\ \mathbf{A},\mathbf{B} \text{ des vecteurs constants} \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) &= (A_1x+A_2y+A_3z)B_1\mathbf{i}+(A_1x+A_2y+A_3z)B_2\mathbf{j} \\
&\quad + (A_1x+A_2y+A_3z)B_3\mathbf{k} \\
\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})) &= \frac{\partial}{\partial x}((A_1x+A_2y+A_3z)B_1)+\frac{\partial}{\partial y}((A_1x+A_2y+A_3z)B_2) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}((A_1x+A_2y+A_3z)B_3) \\
&= A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

8) On a (disons)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_1(x,y,z) &= A_{11}(x,y,z)\mathbf{i}+A_{12}(x,y,z)\mathbf{j}+A_{13}(x,y,z)\mathbf{k} \\
\mathbf{A}_2(x,y,z) &= A_{21}(x,y,z)\mathbf{i}+A_{22}(x,y,z)\mathbf{j}+A_{23}(x,y,z)\mathbf{k} \\
& \quad c_1,c_2 \text{ deux constantes} \\
c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2 &= (c_1A_{11}+c_2A_{21})\mathbf{i}+(c_1A_{12}+c_2A_{22})\mathbf{j} \\
&\quad + (c_1A_{13}+c_2A_{23})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2)\\
&\quad = \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_1A_{11}+c_2A_{21} & c_1A_{12}+c_2A_{22} & c_1A_{13}+c_2A_{23} \end{bmatrix}\\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial y}(c_1A_{13}+c_2A_{23}) - \frac{\partial}{\partial z}(c_1A_{12}+c_2A_{22})\right]\mathbf{i}\\
&\qquad - \left[\frac{\partial}{\partial x}(c_1A_{13}+c_2A_{23}) - \frac{\partial}{\partial z}(c_1A_{11}+c_2A_{21})\right]\mathbf{j}\\
&\qquad\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(c_1A_{12}+c_2A_{22}) - \frac{\partial}{\partial y}(c_1A_{11}+c_2A_{21})\right]\mathbf{k}\\
&\quad = \left[c_1\frac{\partial A_{13}}{\partial y} - c_1\frac{\partial A_{12}}{\partial z} + c_2\frac{\partial A_{23}}{\partial y} - c_2\frac{\partial A_{22}}{\partial z}\right]\mathbf{i}\\
&\qquad - \left[c_1\frac{\partial A_{13}}{\partial x} - c_1\frac{\partial A_{11}}{\partial z} + c_2\frac{\partial A_{23}}{\partial x} - c_2\frac{\partial A_{21}}{\partial z}\right]\mathbf{j}\\
&\qquad\quad + \left[c_1\frac{\partial A_{12}}{\partial x} - c_1\frac{\partial A_{11}}{\partial y} + c_2\frac{\partial A_{22}}{\partial x} - c_2\frac{\partial A_{21}}{\partial y}\right]\mathbf{k}\\
&\quad = c_1\left(\frac{\partial A_{13}}{\partial y} - \frac{\partial A_{12}}{\partial z}\right)\mathbf{i} - c_1\left(\frac{\partial A_{13}}{\partial x} - \frac{\partial A_{11}}{\partial z}\right)\mathbf{j}\\
&\qquad + c_1\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x} - \frac{\partial A_{11}}{\partial y}\right)\mathbf{k} + c_2\left(\frac{\partial A_{23}}{\partial y} - \frac{\partial A_{22}}{\partial z}\right)\mathbf{i}\\
&\qquad\quad - c_2\left(\frac{\partial A_{23}}{\partial x} - \frac{\partial A_{21}}{\partial z}\right)\mathbf{j} + c_2\left(\frac{\partial A_{22}}{\partial x} - \frac{\partial A_{21}}{\partial y}\right)\mathbf{k}\\
&\quad = c_1\mathrm{rot}\mathbf{A}_1 + c_2\mathrm{rot}\mathbf{A}_2
\end{aligned}
$$

9) On a une fonction $A(x,y,z)$ un vecteur constant $\mathbf{r} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

$$A\mathbf{c} = c_1A(x,y,z)\mathbf{i} + c_2A(x,y,z)\mathbf{j} + c_3A(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\mathrm{rot}\ A\mathbf{c} = \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_1A & c_2A & c_3A \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(c_3A) - \frac{\partial}{\partial z}(c_2A)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(c_2A) - \frac{\partial}{\partial y}(c_1A)\right]\mathbf{j}\\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(c_3A) - \frac{\partial}{\partial y}(c_1A)\right]\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[c_3\frac{\partial A}{\partial y} - c_2\frac{\partial A}{\partial z}\right]\mathbf{i} - \left[c_2\frac{\partial A}{\partial x} - c_1\frac{\partial A}{\partial y}\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[c_3\frac{\partial A}{\partial x} - c_1\frac{\partial A}{\partial y}\right]\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
= \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= (\text{grad } A) \times \mathbf{c}
$$

10) On a $\mathbf{A}(x, y, z)$ un champ de vecteurs (ou fonction vectorielle) disons

$$
\mathbf{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\mathbf{i} + A_2(x, y, z)\mathbf{j} + A_3(x, y, z)\mathbf{k}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\text{div}\mathbf{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \\
\triangle\mathbf{A} &= \triangle A_1\mathbf{i} + \triangle A_2\mathbf{j} + \triangle A_3\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right]\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

On suppose toutes les dérivées partielles secondes continues.
N.B. C'est la **définition** de $\triangle\mathbf{A}$ pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}(x, y, z)$.

$$
\begin{aligned}
\text{grad div}\mathbf{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}\right]\mathbf{i} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial z}\right]\mathbf{j} \\
&\quad\quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right]\mathbf{k} \\
\text{grad div}\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right]\mathbf{i} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right]\mathbf{j} \\
&\quad\quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right]\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x}\right)\right] \mathbf{i} \\ & - \left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)\right] \mathbf{j} \\ & \quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z}\right)\right] \mathbf{k} \\ = \quad & \left[\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right] \mathbf{i} \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right] \mathbf{j} \\ & \quad + \left[\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Et on constate l'égalité :

$$\text{grad div}\mathbf{A} - \triangle \mathbf{A} = \text{rot rot}\mathbf{A}$$

à l'aide de l'égalité des dérivées mixtes.

11) On a

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(x, y, z) \text{ un champ de vecteurs} \\ &\varphi(x, y, z) \text{ une fonction scalaire} \end{aligned}$$

disons A $= A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

On a

$$\mathbf{A} \times \text{grad}\varphi = \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \left[A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \mathbf{i} - \left[A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] \mathbf{j} \\ & + \left[A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{rot } \varphi\mathbf{A} = \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi A_1 & \varphi A_2 & \varphi A_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_2)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_1)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_2)\right]\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}A_3 + \varphi\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}A_2 - \varphi\frac{\partial A_2}{\partial z}\right]\mathbf{i} \\
&\quad - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}A_3 + \varphi\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}A_1 - \varphi\frac{\partial A_1}{\partial z}\right]\mathbf{j} \\
&\qquad + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}A_1 + \varphi\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}A_2 - \varphi\frac{\partial A_2}{\partial x}\right]\mathbf{k} \\
&= \varphi\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right] \\
&\quad - \left[\left(A_2\frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_3\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\mathbf{i} - \left(A_1\frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_3\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\mathbf{j}\right. \\
&\qquad \left. + \left(A_1\frac{\partial \varphi}{\partial y} - A_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right] \\
&= \varphi \text{ rot } \mathbf{A} - (\mathbf{A} \times \text{grad } \varphi) \\
\text{rot } \varphi \ \mathbf{A} &= \varphi \text{ rot } \mathbf{A} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{A}
\end{aligned}
$$

5.3 Intégrales doubles et curvilignes

5.3.1

1)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2+y^2)dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + y^2\right) dy \\
&= \left[\frac{7}{3}y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2} &= \int_3^4 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx \\
&= \int_3^4 \left(\left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=1}^{y=2} \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= [-\log(x+2) + \log(x+1)]_3^4 = \left[\log\left(\frac{x+1}{x+2} \right) \right]_3^4 \\
&= \log\frac{5}{6} - \log\frac{4}{5} = \log\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{4} \right) = \log\frac{25}{24}
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_x^{x\sqrt{3}} xy\ dy\ dx &= \int_1^2 \left(\int_x^{x\sqrt{3}} xy\ dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x}^{y=x\sqrt{3}} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3 \cdot 3}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\
&= \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{a\sin\theta}^{a} r\ dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{a\sin\theta}^{a} r\ dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=a\sin\theta}^{r=a} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sin^2(\theta)}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1-\sin^2(\theta)) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin(4\pi)}{4}+\pi-\left(\frac{\sin 0}{4}+\frac{0}{2}\right)\right]=\frac{a^2\pi}{2} \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \int\limits_0^a\int\limits_{\frac{x}{a}}^x \frac{x}{x^2+y^2}dydx &= \int\limits_0^a\left(\int\limits_{\frac{x}{a}}^x \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx \\ &= \int\limits_0^a\left[\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right]_{y=\frac{x}{a}}^{y=x}dx=\int\limits_0^a\left(\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}\frac{1}{a}\right)dx \\ &= a\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)\right)=\frac{a\pi}{4}-a\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} \int\limits_0^a\int\limits_{y-a}^{2y} xydxdy &= \int\limits_0^a\left(\int\limits_{y-a}^{2y} xydx\right)dy \\ &= \int\limits_0^a\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=y-a}^{x=2y}dy=\int\limits_0^a\left(\frac{4y^3}{2}-\frac{(y-a)^2y}{2}\right)dy \\ &= \int\limits_0^a\left(\frac{3y^3}{2}+ay^2-\frac{a^2y}{2}\right)dy \\ &= \left[\frac{3y^4}{8}+a\frac{y^3}{3}-a^2\frac{y^2}{4}\right]_0^a=3\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}-0 \\ &= \frac{11}{24}a^4 \end{aligned}$$

7)

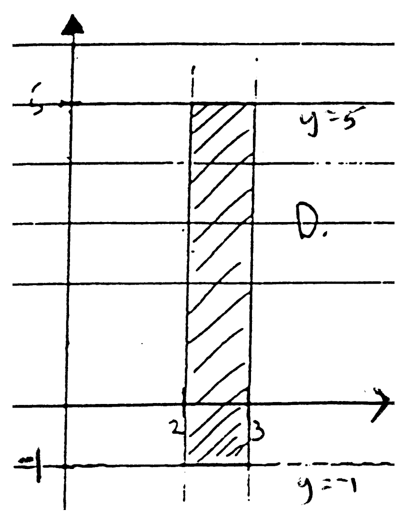
$$\begin{aligned} \int\limits_{\frac{b}{2}}^b\int\limits_0^{\pi/2}\rho\ d\theta d\rho &= \int\limits_{\frac{b}{2}}^b\left(\int\limits_0^{\pi/2}\rho d\theta\right)d\rho=\int\limits_{\frac{b}{2}}^b[\rho\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}d\rho \\ &= \int\limits_{\frac{b}{2}}^b\frac{\rho\pi}{2}\cdot d\rho=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{b}{2}}^b \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\pi}{2}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{8}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot 3\frac{b^2}{8}=\frac{3}{16}\pi b^2$$

5.3.2

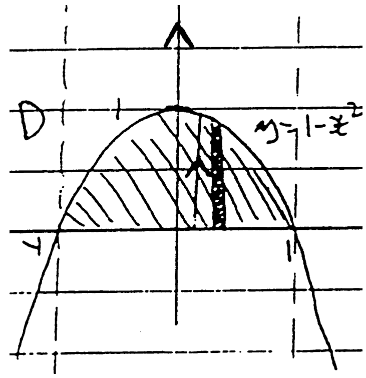
1)

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_D f(x,y)dydy &= \int_2^3\int_{-1}^5 f(x,y)dydx \\ &= \int_{-1}^5\int_2^3 f(x,y)dxdy\end{aligned}$$



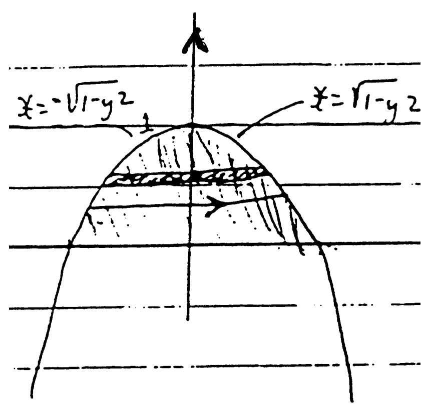
2)

$$\int\!\!\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} f(x,y)dydx$$



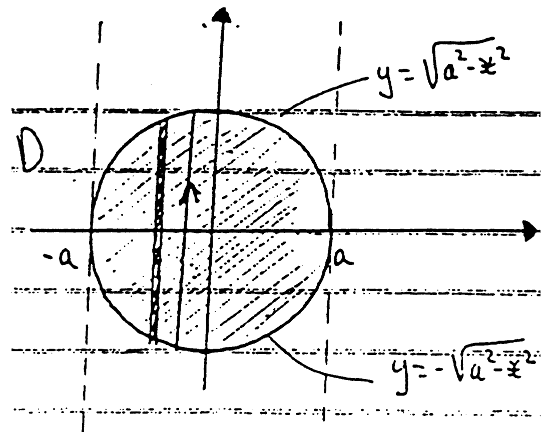
aussi

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$$

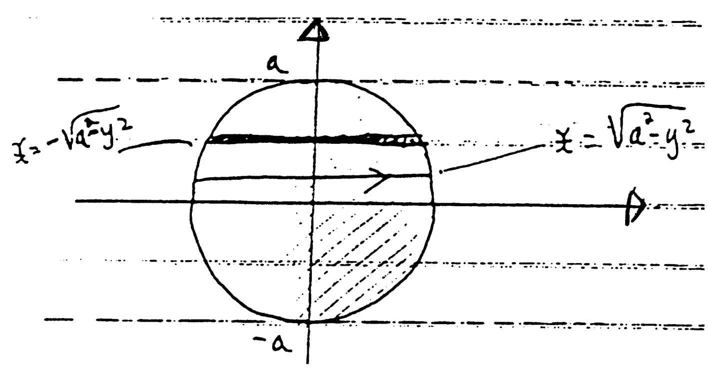


3)

$$\int\int\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dydx$$



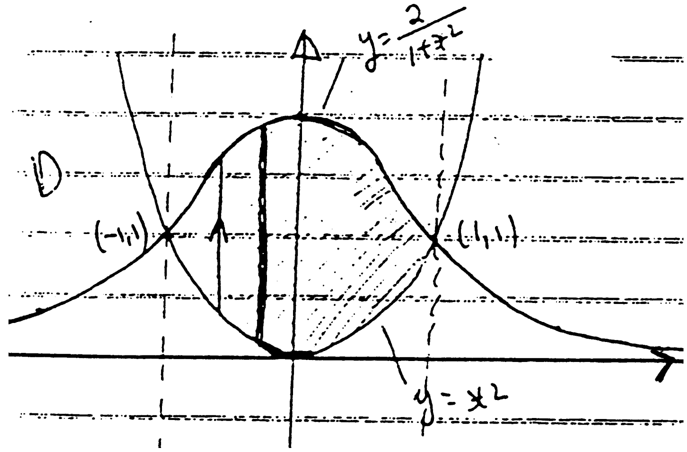
aussi



$$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dxdy$$

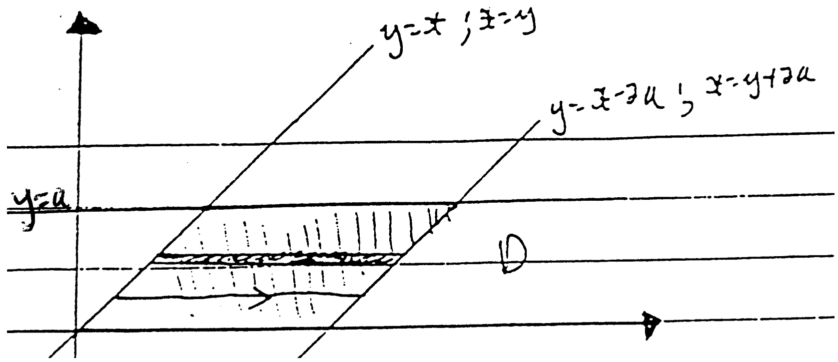
4)

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)dydx$$



5)

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_y^{y+2a} f(x,y)dxdy$$

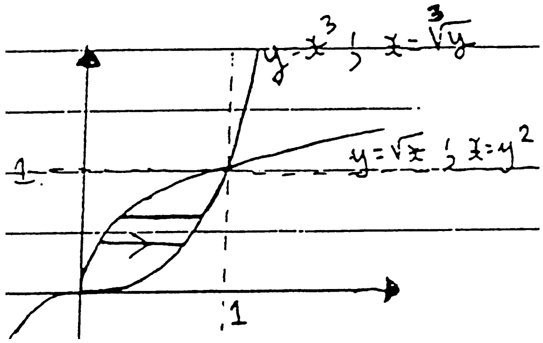


5.3.3

1) La région est un rectangle, situation bien connue.

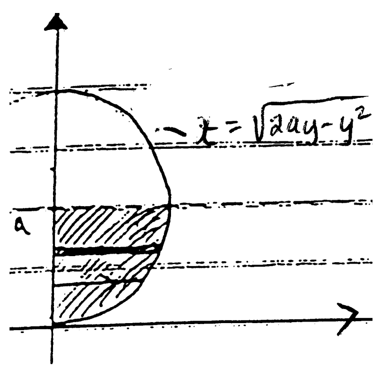
2)

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$$



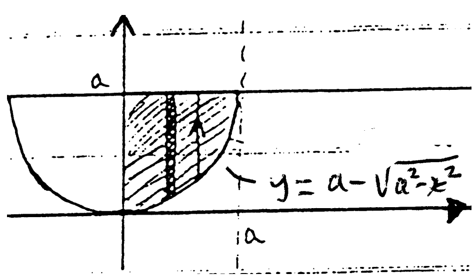
3) **Notons** : $x=\sqrt{2ay-y^2}$, d'où $x^2=2ay-y^2$, $x^2+y^2-2ay+a^2=a^2$, $x^2+(y-a)^2=a^2$.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dxdy$$



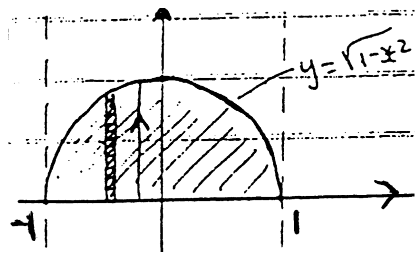
Pour intervertir :

$$\int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,y)dydx$$



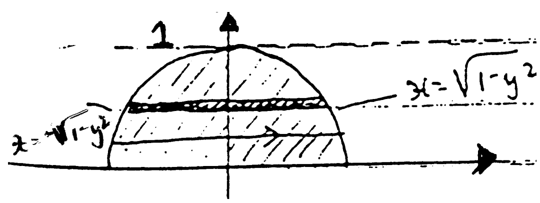
4) **Notons** :$y=\sqrt{1-x^2}$, d'où $y^2=1-x^2$, $x^2+y^2=1$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$



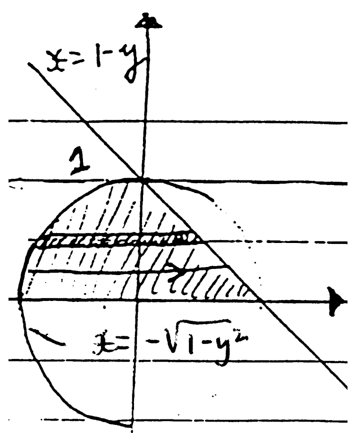
Pour intervertir :

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$$



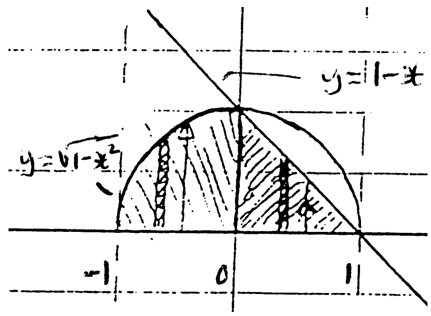
5)

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$$



Pour intervertir, on doit séparer la région en deux : on intègre sur chacune et on les additionne.

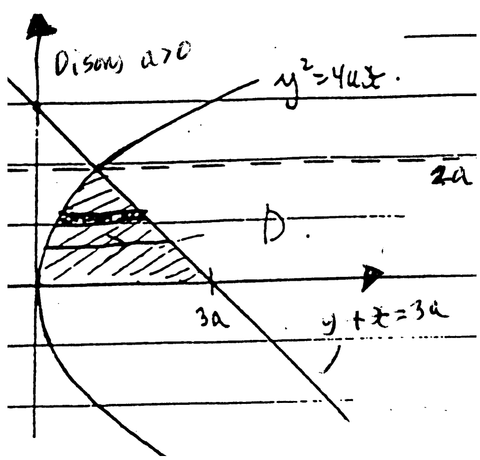
$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)dydx$$



5.3.4

On a à calculer

$$\int\int_D dxdy$$



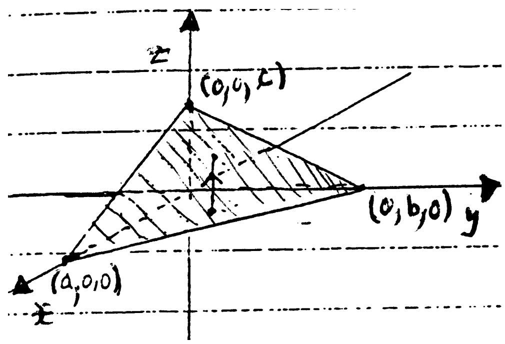
Points d'intersection : on résout le système $y^2 = 4ax, y + x = 3a$, on trouve les points $(a, 2a), (9a, -6a)$

$$\int\int_D dxdy = \int_{0}^{2a}\int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dxdy = \int_{0}^{2a}\left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= \left[3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right]_0^{2a} = \frac{10}{3}a^2$$

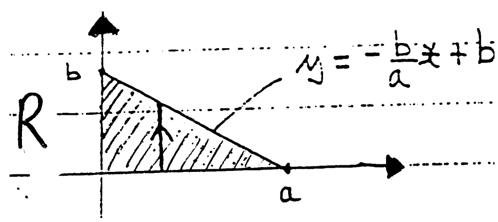
5.3.5

On suppose $a, b, c > 0$. Les quatre surfaces données sont des plans : les trois plans de coordonnées, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, et le plan $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.



Le volume délimité par ces quatre plans peut être décrit comme étant le volume situé au-dessus de la région R du plan xy et sous le graphe de la fonction $z = c\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$

R est la région suivante du plan xy



La mesure du volume demandé est donc

$$\iint_R c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dxdy = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dydx$$

$$= c\int_0^a \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b}\right]_0^{-\frac{b}{a}x+b} dx$$

$$= c\int_0^a \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}x + b\right) - \frac{1}{2b}\left(\frac{-b}{a}x + b\right)^2\right] dx$$

$$
\begin{aligned}
&= c\int_0^a \left(\frac{b}{2a^2}x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b}{2}\right) dx = c\left[\frac{b}{6a^2}x^3 - \frac{b}{2a}x^2 + \frac{b}{2}x\right]_0^a \\
&= \frac{abc}{6}
\end{aligned}
$$

5.3.6

Disons que le disque est centré à l'origine. La densité est $\rho(x,y) = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}$

La masse totale est donnée par l'intégrale

$$\iint_D \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

Il est plus commode de passer en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta),\ \ y = r\sin\theta$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \iint_D \frac{K}{r} r\ drd\theta = \iint_D K\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a K\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [Kr]_{r=0}^{r=a}\, d\theta = \int_0^{2\pi} Kad\theta = 2\pi Ka
\end{aligned}
$$

5.3.7

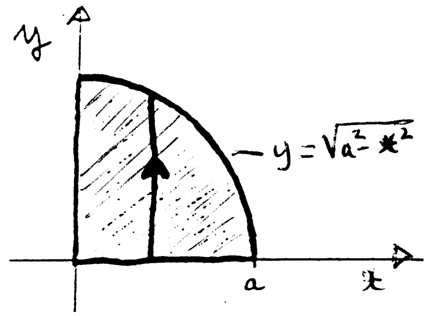
1) On suppose $a > 0$, on a

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 = x^2 - y^2}\ dydx$$

Passage aux coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\,;\ \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2}$$

On doit analyser le domaine d'intégration pour trouver les nouvelles bornes.



On obtient

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\; drd\theta$$

Calcul :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\; drd\theta &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\; dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=a} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{a^3}{3}d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}a^3
\end{aligned}$$

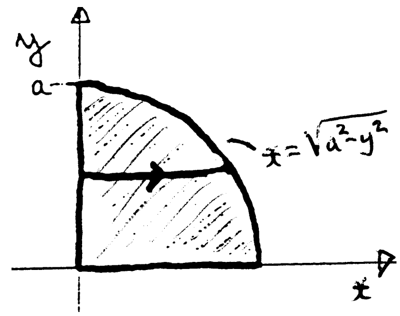
2) On suppose $a > 0$, on a

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$$

Passage aux coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta,\;\; y = r\sin\theta\,;\;\; x^2+y^2 = r^2$$

On doit analyser le domaine d'intégration pour trouver les nouvelles bornes.



On obtient

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2\cdot r\ drd\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^a r^3\ drd\theta$$

Calcul :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^a r^3\ drd\theta &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^a d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}a^4d\theta\\ &= \frac{\pi}{8}a^4\end{aligned}$$

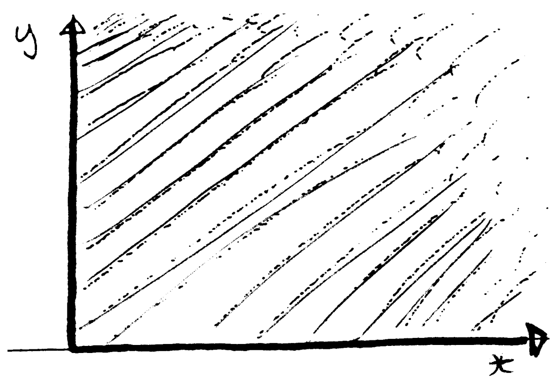
3) On a

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dydx$$

Passage aux coordonnées polaires :

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\,;\ e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$$

On doit analyser le domaine d'intégration pour trouver les nouvelles bornes.



On obtient

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \; dr d\theta$$

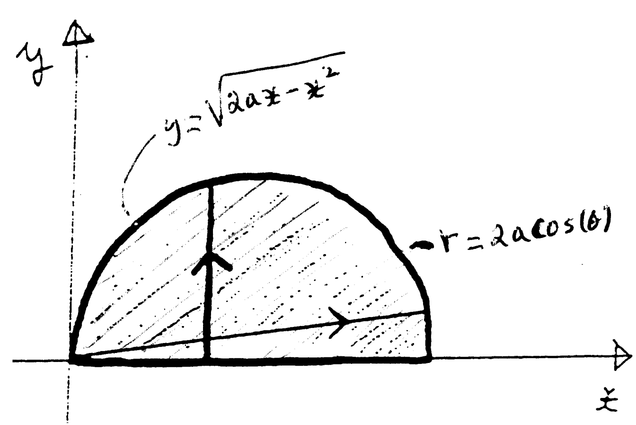
Calcul :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \; dr d\theta &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \; dr\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{-1}{2}\cdot e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\infty} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2} d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

4) On suppose $a > 0$, on a

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx$$

Passage aux coordonnées polaires : $x = r\cos\theta,\; y = r\sin\theta$. On doit analyser le domaine d'intégration pour trouver les nouvelles bornes. N.B. En « complétant le carré », on a $\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$



$y=\sqrt{2ax-x^2}$ donne $y^2=2$, d'où

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 2ax \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta) \\ r &= 2a\cos(\theta) \end{aligned}$$

On obtient

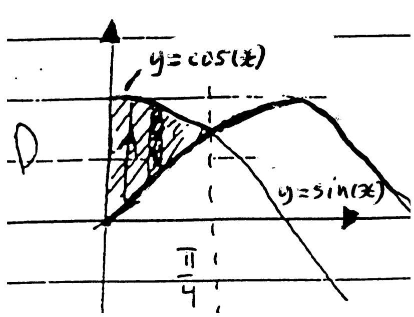
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos(\theta)} r\ drd\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2a\cos(\theta)} r\ dr\right]d\theta &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{2a\cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 2a^2\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} a^2(1+\cos(2\theta))d\theta = a^2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

5.3.8

a) On a à calculer

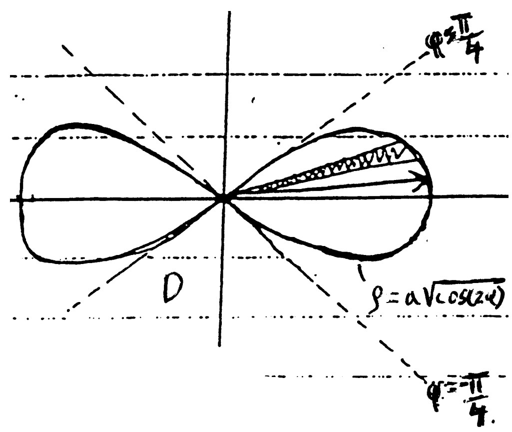
$$\int\int_D dxdy$$



$$\iint_D dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} dydx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx$$
$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 = \sqrt{2} - 1$$

b) On a à calculer

$$\iint_D r \; drd\varphi$$



L'aire de la boucle de droite est égale à celle de la boucle de gauche, par symétrie de la courbe ; l'aire de la boucle de droite est donnée par

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} r \; drd\varphi$$

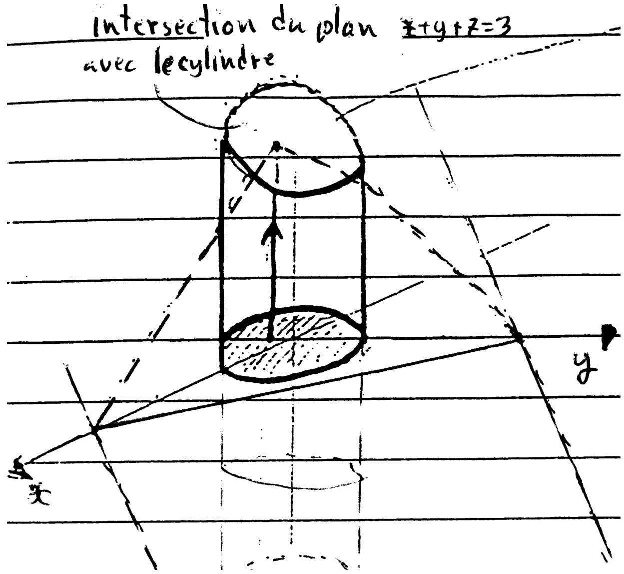
N.B. Comme pour les coordonnées rectangulaires, l'ordre des différentielles $drd\varphi$ indique l'ordre d'intégration.

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{a^2}{2}\cos(2\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{4}\left[\sin(2\varphi)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

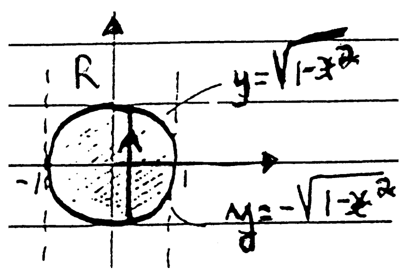
L'aire totale est donc $2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$.

5.3.9

a) Les surfaces données sont deux plans, $z = 0$, $x + y + z = 3$, et un cylindre, $x^2 + y^2 = 1$



Le volume demandé peut être décrit comme le volume au-dessus de la région $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ du plan xy et sous le graphe de la fonction $z = 3 - x - y$.

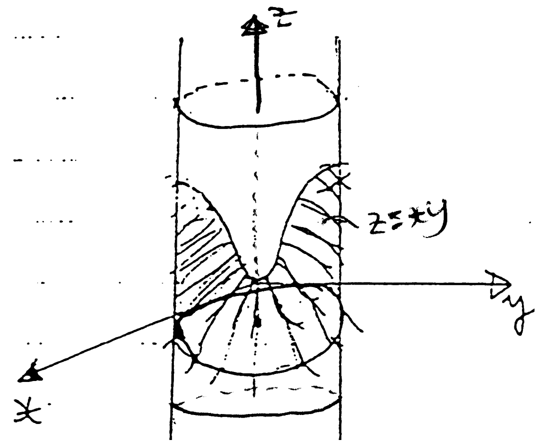


La mesure du volume demandé est donnée par

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_R 3 - x - y \; dxdy &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y) dydx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[(3 - x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{aligned}$$

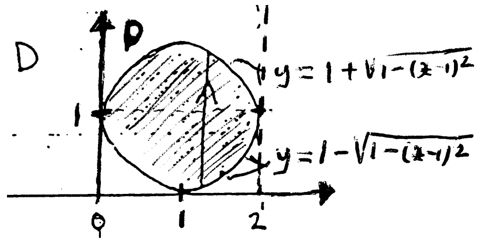
$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} \left[(3-x)\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)}{2}\right] \\
&\qquad - \left[(3-x)(-\sqrt{1-x^2}) - \frac{(1-x^2)}{2}\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} (6\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2})dx \\
&= 6\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx - \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx \\
&= 6\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta + \left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{1} \quad ; \\
&\qquad \text{en posant } x = \sin\theta \\
&= 6\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = 3\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\pi
\end{aligned}
$$

b) Les surfaces données sont un plan, $z = 0$, un cylindre, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ et un « hyperboloïde », $z = xy$.



On note que le graphe de la fonction $z = xy$ est au-dessus de la région du plan $z = 0$ délimitée par $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; région qui se trouve être le disque

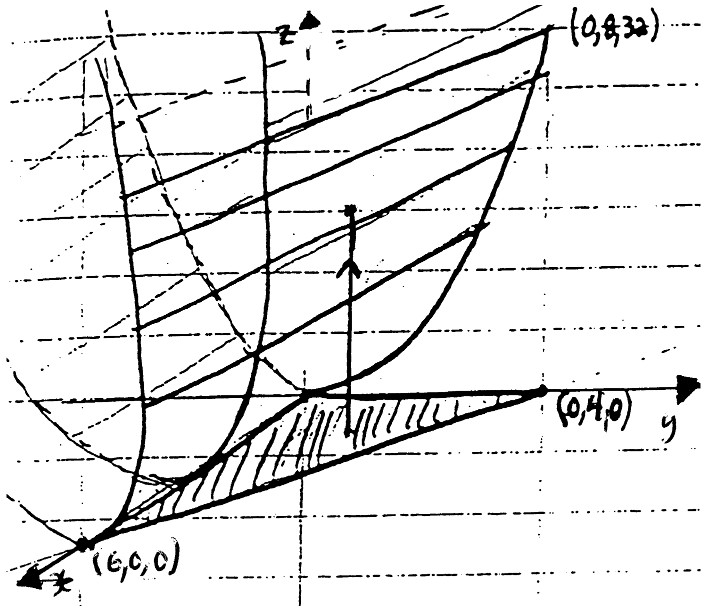
$$D = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$



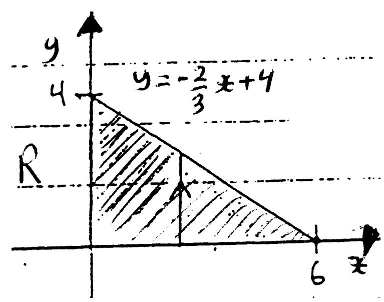
La mesure du volume demandé est donnée par

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} xy\ dxdy &= \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = 2\int\limits_{0}^{2} x\sqrt{1-(x-1)^2}dx; \\
&\quad \text{posons } x-1 = \sin\theta \\
&= 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta \\
&\qquad + 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos(2\theta))d\theta + 2[\cos^3(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0 = \pi
\end{aligned}$$

c) Les surfaces données sont les plans de coordonnées, le plan $2x+3y-12=0$ et le cylindre $z = \frac{1}{2}y^2$.



Le volume demandé peut être décrit comme le volume au-dessus de la région R (voir ci-dessus) du plan xy et sous le graphe de la fonction $z = \dfrac{1}{2}y^2$ (vue comme fonction des deux variables x, y)



La mesure du volume demandé est donnée par

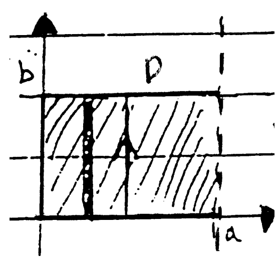
$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{2}y^2 dxdy &= \int_0^6 \int_0^{-\frac{2}{3}x+4} \frac{1}{2}y^2 dy\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^6 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{-\frac{2}{3}x+4} dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^6 \left(-\frac{2}{3}x+4\right)^3 dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[\left(-\frac{2}{3}x+4\right)^4\right]_0^6 \\
&= \frac{4^4}{16} \\
&= 16
\end{aligned}
$$

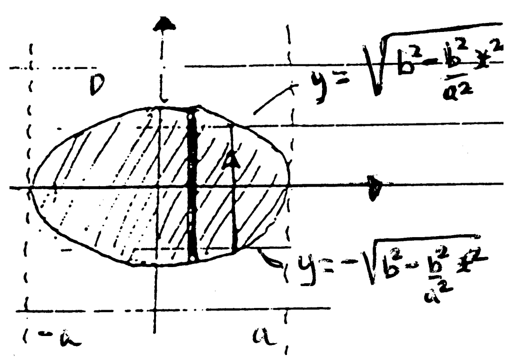
5.3.10

a) On doit calculer

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int_D x^2+y^2dxdy &= \int_0^a\int_0^b x^2+y^2dydx \\
&= \int_0^a \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=b} dx = \int_0^a \left(x^2b+\frac{b^3}{3}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}b+\frac{b^3}{3}x\right]_0^a = \frac{a^3b}{3}+\frac{b^3a}{3} = \frac{ab}{3}(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$



b)



$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_D x^2+y^2 dxdy &= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}^{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}} (x^2+y^2)dydx \\
&= \int_{-a}^{a}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}^{y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}} dx \\
&= \int_{-a}^{a} 2\left(x^2\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}+3\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)^{3/2}\right)dx \\
&= \int_{-a}^{a}\left(2x^2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{2}{3}b^3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)dx
\end{aligned}$$

Posons

$$x = a\cos\theta$$

on a

$$\begin{aligned}
dx &= -a\sin\theta d\theta \\
\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} &= \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sin\theta
\end{aligned}$$

$$x=-a,\ \text{quand } \theta=\pi,\ x=a \text{ quand } \theta=0.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi}^{0}\left(2a^2\cos^2(\theta)\cdot b\sin(\theta)+\frac{2}{3}b^3(1-\cos^2(\theta))\sin(\theta)\right) \\
&\quad \cdot(-a)\sin(\theta)d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0}\left(2a^3b\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\frac{2}{3}ab^3(\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))\right)d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi}\left(a^3b2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\frac{2}{3}ab^3\sin^2(\theta)-\frac{ab^3}{3}2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\right)d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi}\left(a^3b\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right)+\frac{2ab^3}{3}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\ \frac{ab^3}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right)\right)d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^3 b \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_0^{\pi}+\frac{2ab^3}{3}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi} \\
&\quad -\frac{ab^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_0^{\pi} \\
&= a^3 b\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{3}ab^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{ab^3}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^3b\cdot\frac{\pi}{4}+ab^3\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{ab\pi}{4}(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

5.3.11

1) On a

$$\int_L y^2dx+2xydy,$$

où L est le cercle donné par les équations paramétriques

$$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t$$

Pour parcourir le cercle une fois, disons à partir du point M, t varie dans l'intervalle $[0,2\pi]$. On a

$$x'(t)=-a\sin t,\ \ y'(t)=a\cos t$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
&\int_L y^2dx+2xydy \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}(a^2\sin^2(t)\cdot(-a\sin(t))+2a\cos(t)\cdot a\sin(t)\cdot a\cos(t))dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}(-a^3(1-\cos^2(t))\sin(t)+2a^3\cos^2(t)\sin(t))dt \\
&\qquad = a^3\int_0^{2\pi}(-\sin(t)+3\cos^2(t)\sin(t))dt \\
&\qquad = a^3[\cos(t)+-\cos^3(t)]_0^{2\pi}=0
\end{aligned}
$$

2) On a

$$\int_L ydx - xdy$$

où L est l'ellipse donnée par

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$

Pour parcourir l'ellipse une fois, à partir du point M, t varie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. On a

$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = b\cos t$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_L ydx = xdy &= \int_0^{2\pi} (b\sin(t)\cdot(-a\sin(t)) - a\cos(t)(b\cos(t)))dt \\ &= -ab\int_0^{2\pi}(\sin^2(t)+\cos^2(t))dt = -ab\int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab\end{aligned}$$

3) On a

$$\int_L \frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

où L est un cercle centré à l'origine.
Disons un cercle de rayon R ; on a les équations paramétriques

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t$$

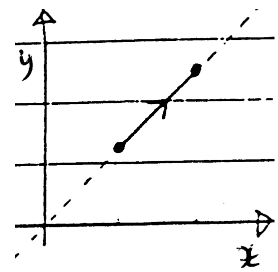
Procédons comme en 1) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_L \frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{y}{x^2+y^2}dy \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{R\cos(t)}{R^2}(-R\sin(t)) - \frac{R\sin(t)}{R^2}R\cos(t)\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sin(t)\cos(t)[\cos^2(t)]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

4) On a

$$\int\limits_L \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

où L est le segment sur la droite $y = x$ de $x = 1$ à $x = 2$.



On peut utiliser la paramétrisation $x = t,\ y = t,\ t \in [1, 2]$.

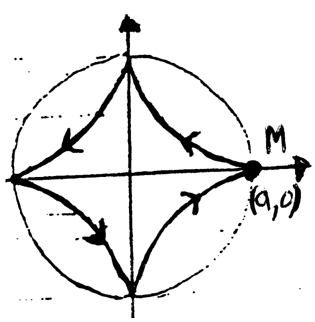
$$\begin{aligned}\int\limits_L \frac{y}{x^2+y^2}dx\frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int \left(\frac{t}{t^2+t^2}1 + \frac{t}{t^2+t^2}1\right) dt \\ &= \int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt = \log 2\end{aligned}$$

5) On a

$$\int\limits_L -ydx + xdy$$

où L est l'hypocycloïde

$$x = a\cos^3(t),\ y = a\sin^3(t)$$



Pour parcourir l'hypocycloïde une fois, disons à partir du point $M(a, a)$, le paramètre t varie dans l'intervalle $[2, \pi]$. On a

$$x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t),\ y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_L xdy - ydx &= \int_0^{2\pi} (-a\sin^3(t)\cdot(-3a\cos^2(t)\sin(t)) \\
&\quad + a\cos^3(t)(3a\sin^2(t)\cos(t)))dt \\
&= 3a^2\int_0^{2\pi}(\sin^4(t)\cos^2(t)+\cos^4(t)\sin^2(t))dt \\
&= 3a^2\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos^2(t)(\sin^2(t)+\cos^2(t)) \\
&= 3a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(2t)}{4}dt = \frac{3a^2}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt \\
&= \frac{3a^2}{4}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{4}
\end{aligned}$$

5.3.12

1) On a

$$\int_L yzdx + xzdy + xydz$$

où L est l'arc d'hélice donné par

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = kt,\ t\in[0,2\pi]$$

a, k sont des constantes disons $a, k > 0$.
On a

$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,\ z'(t) = k$$

$$\begin{aligned}
&\int_L yzdx + xzdy + xydz \\
&\quad = \int_0^{2\pi}(a\sin(t)\cdot kt(-a\sin(t)) + a\cos(t)\cdot kt\cdot a\cos(t) \\
&\qquad + a\cos(t)\cdot a\sin(t)\cdot k)dt
\end{aligned}$$

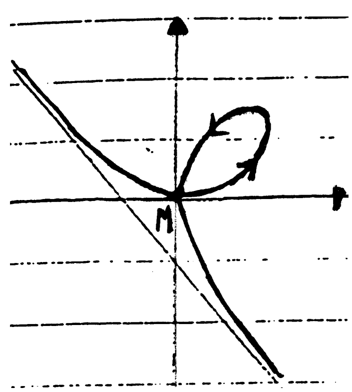
$$
\begin{aligned}
&= a^2k\int_0^{2\pi}(-t\sin^2(t)+t\cos^2(t)+\sin(t)\cos(t))dt\\
&= a^2k\int_0^{2\pi}[t(\cos^2(t)-\sin^2(t))+\sin(t)\cos(t)]dt\\
&= a^2k\left[\int_0^{2\pi}t\cos(2t)dt+\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)dt\right]\\
&= a^2k\left[\left[t\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2t)}{2}dt+\left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{2\pi}\right]\\
&= a^2k\left[0+\left[\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{2\pi}+0\right]=a^2k\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0
\end{aligned}
$$

2) On a

$$\int_L -ydx+xdy$$

où L est la boucle du folium de Descartes

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$



Pour parcourir la boucle du folium de Descartes, disons à partir du point $M(0,0)$, t varie dans l'intervalle $[0,+\infty]$. On a

$$x'(t)=3a\frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},\quad y'(t)=3a\frac{(2t-t^4)}{(1+t^3)^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int\limits_L -ydx + xdy &= \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{-3at^2}{(1+t^3)} \cdot \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3at}{(1+t^3)} \cdot \frac{3a(2t-t^4)}{(1+t^3)^2} \right) dt \\
&= 9a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^2} dt = 9a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3} dt \\
&= 9a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\
&= 9a^2 \left[\frac{1}{3} \frac{-1}{(1+t^3)} \right]_0^{+\infty} \\
&= 3a^2 \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-1}{1+t^3} + 1 \right) \\
&= 3a^2
\end{aligned}$$

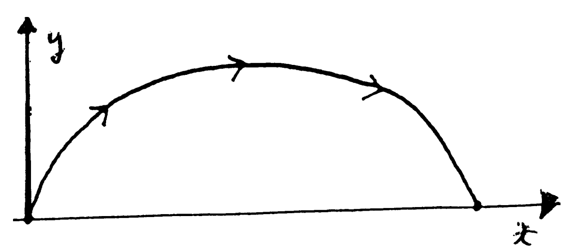
3) On a

$$\int\limits_L xdy - ydx$$

où L est l'arc de courbe donné par

$$x = a(t - \sin(t)), \quad y = a(1 - \cos(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(Un arc de cycloïde), a est une constante positive, $a > 0$.



On a

$$x'(t) = a(1 - \cos(t)), \quad y'(t) = a\sin(t)$$

$$
\begin{aligned}
\int_L xdy - ydx &= \int_0^{2\pi} [a(t-\sin(t)) \cdot a\sin(t) - a(1-\cos(t)) \cdot a(1-\cos(t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2[t\sin(t) - \sin^2(t) - (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))]dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2[t\sin(t) + 2\cos(t) - 2]dt \\
&= a^2[-t\cos(t) + \sin(t) + 2\sin(t) - 2t]_0^{2\pi} \\
&= a^2[-2\pi + 0 - 4\pi - 0] \\
&= -6\pi a^2
\end{aligned}
$$

N.B. Pour avoir le double de l'aire délimitée par un arc de cycloïde et l'axe des x, on peut intégrer sur la boucle formée de l'arc de cycloïde et du segment sur l'axe des x qui revient vers l'origine.

La partie sur l'axe des x donne une contribution nulle. On obtient $6\pi a^2$.

5.3.13

1) On a

$$\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

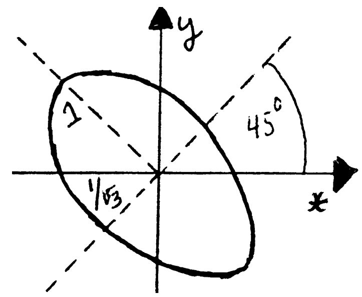
où L est le cercle donné par l'intersection des surfaces d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0$$

Notons : en isolant $z = -x - y$ et en substituant dans la 1^{re} équation on obtient

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + (-x-y)^2 &= a^2 \\
x^2 + y^2 + xy &= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

qui est l'équation d'une ellipse ayant subi une rotation de 45°.



En utilisant la paramétrisation connue des ellipses et les équations de rotation, on obtient la paramétrisation suivante :

$$
\begin{aligned}
x &= a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta) - a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta), \quad 0\le\theta\le 2\pi\\
y &= a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta)\\
z &= -a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
x'(\theta) &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right)\\
y'(\theta) &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos(\theta) - \frac{}{1}\sqrt{3}\sin(\theta)\right)\\
z'(\theta) &= a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

$$\int\limits_L (y_+x)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

$$
\begin{aligned}
= \int\limits_0^{2\pi} \Bigg[& \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta) - \frac{2}{3}\cos(\theta)\right)\\
& \cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right)\\
& + \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)\right)\\
& \cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta) - \sin(\theta) + \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cos(\theta) \right) \\
& \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right) \Bigg] \, d\theta \\
= \;& \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \Bigg[\left(\sin(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) - \cos(\theta) \right) \\
& + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta) - \sin(\theta) \right) \left(\cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right) \\
& + \frac{4}{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \Bigg] \, d\theta \\
= \;& \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \Bigg[-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2(\theta) - \frac{2}{3} \sin(\theta) \cos(\theta) \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2(\theta) - \frac{2}{3} \sin(\theta) \cos(\theta) \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2(\theta) + \frac{4}{3} \sin(\theta) \cos(\theta) \Bigg] \, d\theta \\
= \;& \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} 0 \cdot d\theta \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

2) On a

$$\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

où L est le cercle donné par l'intersection des surfaces d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $z = 0$, R est une constante positive, $R > 0$.

On peut utiliser la paramétrisation

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos(\theta) \\
y &= R\sin(\theta) \\
z &= 0 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi
\end{aligned}
$$

On a

$$x'(\theta) = -R\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= R\cos(\theta) \\ z'(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_L x^2y^3dx + dy + zdz \\
&= \int_0^{2\pi} [R^2\cos^2(\theta)R^3\sin^3(\theta) \cdot -R\sin(\theta) + R\cos(\theta) + 0]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-R^6\cos^2(\theta)\sin^4(\theta) + R\cos(\theta)]d\theta \\
&= -R^6 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^4(\theta)d\theta + R\int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta \\
&= -R^6 \left[\left[-\frac{\sin^3(\theta)\cos^3(\theta)}{6} \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{6}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \right] \\
&\quad + R\left[\sin(\theta)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{R^6}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(2\sin(\theta)\cos(\theta))^2 d\theta = -\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)d\theta \\
&= -\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}d\theta = -\frac{R^6}{8}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{R^6\pi}{8}
\end{aligned}$$

b) On a

$$\int_L e^{x+y}\sin(y+z)dx + e^{x+y}(\sin(y+z)+\cos(y+z))dy + e^{x+y}\cos(y+z)dz$$

où L est le segment de droite allant de (0,0,0) à $(1, \pi/4, \pi/4)$.

On peut utiliser la paramétrisation

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{\pi}{4}t \\ z &= \frac{\pi}{4}t, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

On a

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \frac{\pi}{4}, \quad z'(t) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_L e^{x+y}\sin(y+z)dx + e^{x+y}(\sin(y+z)+\cos(y+z))dy + e^{x+y}\cos(y+z)dz$$

$$\begin{aligned}
= & \int_0^1 e^{t+\frac{\pi}{4}t}\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}t\right)\cdot 1 + e^{t+\frac{\pi}{4}t}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}t\right)\right. \\
& + \left.\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}t\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4} + e^{t+\frac{\pi}{4}t}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}t\right)dt \\
= & \int_0^1 e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sin\frac{\pi}{2}t+\cos\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{\pi}{4} \\
& + e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{\pi}{4}dt \\
= & \int_0^1 \left[\left(1+\frac{\pi}{4}\right)e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]dt \\
= & \left[\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}}{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\right. \\
& + \left.\frac{\pi}{2}\frac{e^t\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\right]_0^1 \\
= & e^{1+\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

5.3.14

On a un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i}+F_2(x,y)\mathbf{j}$, D, un domaine régulier du plan et L, la frontière de D

À voir :

$$\iint_D \text{div}\mathbf{F}\ dxdy = \oint_L -F_2(x,y)dx + F_1(x,y)dy$$

On a

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{G}(x,y) = -F_2(x,y)\mathbf{i} + F_1(x,y)\mathbf{j}$$

Par la formule de Green on a

$$\begin{aligned}
\oint\limits_L -F_2(x,y)dx + F_1(x,y)dx &= \int\!\!\int\limits_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial(-F_2)}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int\!\!\int\limits_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int\!\!\int\limits_D \mathrm{div}\mathbf{F}\ dxdy
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien la relation demandée.

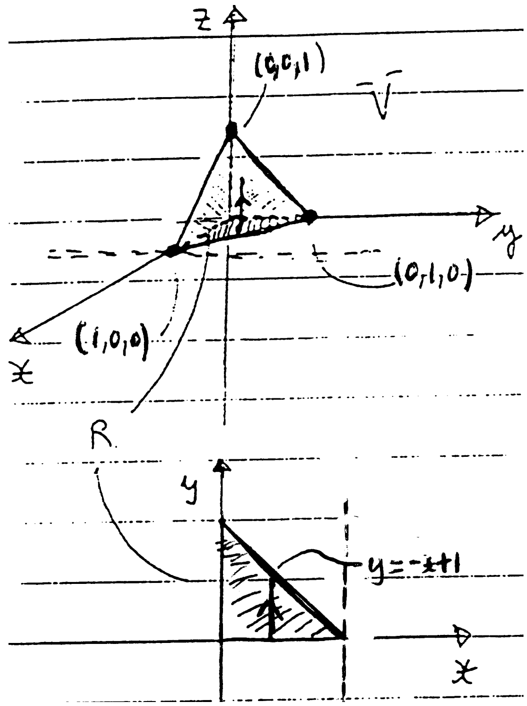
5.4 Intégrales triples et intégrales de surface

5.4.1

1) On a

$$\int\!\!\int\limits_V\!\!\int \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

où V est la région de l'espace délimitée par les plans de coordonnées et le plan $x+y+z=1$.



On peut décrire V de la façon suivante :

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq -x + 1,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

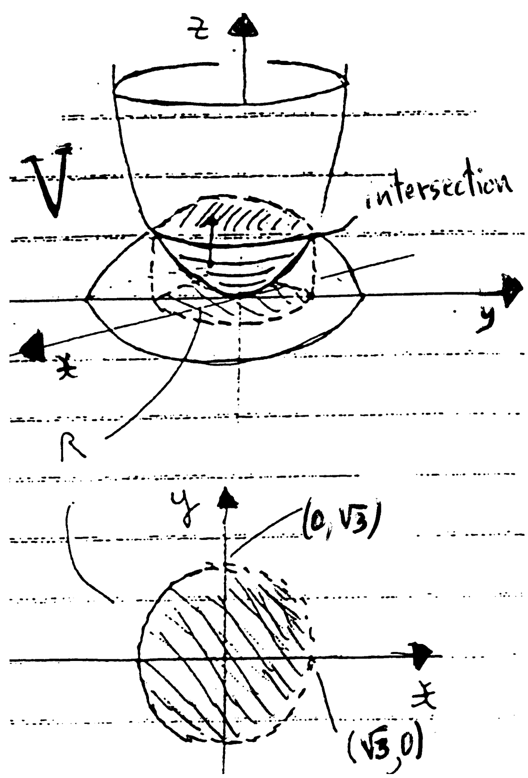
Ainsi

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{-x+1} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{-x+1} \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{-x+1} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+y+1)^2}\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(x+y+1)}\right]_{y=0}^{y=-x+1} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{16} - \frac{3x}{8} + \frac{1}{2}\log(x+1) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

2) L'intersection de la sphère avec le paraboloïde est donnée par l'ensemble solution du système d'équations

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases}
$$



On obtient

$$
\begin{aligned}
3z + z^2 &= 4 \\
z^2 + 3z - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$z = -4 \text{ ou } z = 1$$

D'après la figure, on a $z = 1$, d'où $x^2 + y^2 = 3$.

Donc l'intersection est

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 3 \text{ et } z = 1\}$$

On peut décrire V de la façon suivante

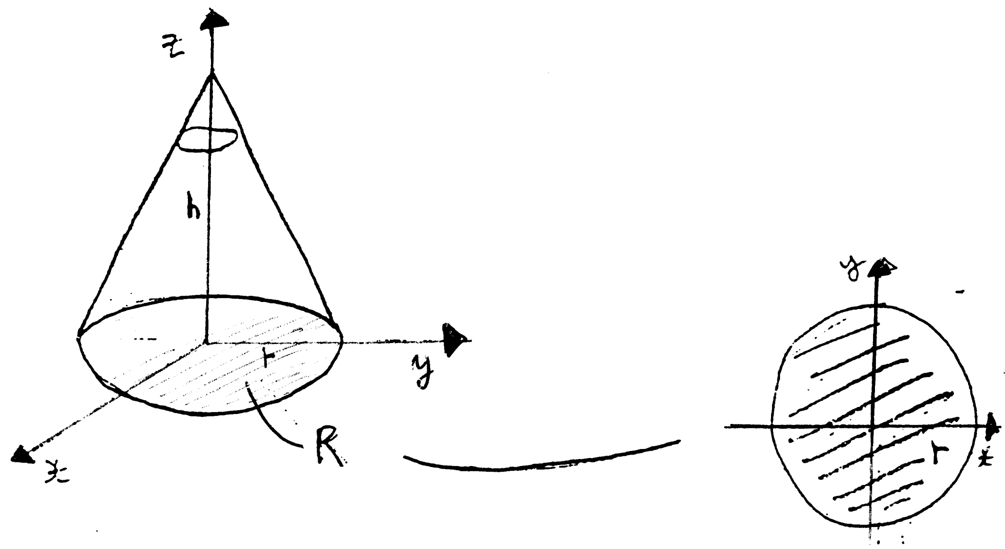
$$V = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in R \text{ et } \frac{x^2 + y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}\right\}$$

Il est avantageux de passer aux coordonnées cylindriques :

$$V = \left\{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volume de } V &= \iiint_V \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho dz d\theta d\rho \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \rho \left(\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{3}\right) d\theta d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{3} d\rho \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2}\frac{(4 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{\rho^4}{12}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{19}{6}\pi
\end{aligned}$$

3) **À calculer :** Le moment d'inertie d'un cône circulaire droit par rapport à son axe. Disons h = hauteur du cône, r = rayon du cercle de base. Pour faciliter les calculs, prenons un système d'axe tel que l'axe du cône coïncide avec l'axe des z et que le cercle de base se trouve dans le plan x, y et le sommet à une hauteur h au-dessus du plan x, y.



Le cône coïncide avec le volume délimité par la surface d'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2}(z-h)^2 = 0$$

et le plan $z = 0$
On peut décrire ce volume de la façon suivante

$$V = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in R \text{ et } 0 \leq z \leq -\sqrt{\frac{h^2}{r^2}(x^2 + y^2)} + h \right\}$$

Il est avantageux de passer aux coordonnées cylindriques. On obtient

$$V = \left\{ (\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq h - \frac{h}{r}\rho \right\}$$

On a

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint_V x^2 + y^2 dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{h-\frac{h}{r}\rho} \rho^2 \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(h - \frac{h}{r}\rho \right) \rho^3 d\rho d\theta = h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 - \frac{\rho^4}{r} d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$= h\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5r}\right]_0^r d\theta = h\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{20}d\theta$$

$$= \frac{\pi h r^4}{10}$$

Le moment d'inertie cherché est donc de $\dfrac{\pi h r^4}{10}$

4) **À calculer :** Le volume délimité par la surface d'équation $(x^2 = y^2+z^2) = a^3x$. Il est avantageux de passer aux coordonnées sphériques. L'équation de la surface devient

$$\begin{array}{rcl}(r^2)^2 & = & a^3 r\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ r^3 & = & \sin(\varphi)\cos(\varphi)\end{array}$$

Notons que puisqu'on a toujours $r \geq 0$, et $0 \leq \varphi \leq \pi$, la surface ne possède de points que pour

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

On a

$$r = a\sqrt[3]{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}$$

Cette équation force la surface à être fermée sur elle-même (c'est-à-dire à délimiter un volume ; vérifiez avec l'ordinateur) Le volume est donné par

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{a\sqrt[3]{\sin(\varphi)\cos(\theta)}} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a\sqrt[3]{\sin(\varphi)\cos(\theta)}} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)d\varphi d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)d\varphi d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\sin^2(\varphi)\cos\theta d\varphi d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\varphi)\cos(\theta)d\varphi d\theta\right]$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\varphi-\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi}\cos(\theta)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left[\frac{\varphi-\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi}\cos(\theta)d\theta\right]$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \left[[\sin\theta]_0^{\pi/2} + [\sin\theta]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right] = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{a^3\pi}{3}$$

5) **À calculer :** Le moment d'inertie d'un cône circulaire (droit) par rapport au diamètre de sa base. Disons h = hauteur du cône, r rayon du cercle de base. On utilise le même système d'axe et les mêmes équations qu'au numéro 3) ;on cherche maintenant le moment d'inertie par rapport à l'axe des y (ou de façon équivalente, par rapport à l'axe des x).
On obtient

$$I_{yy}$$

$$= \iiint\limits_V x^2 + z^2 dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{h\left(1-\frac{3}{r}\right)} (\rho^2\cos^2(\theta) + z^2)\rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \left[\rho^3\cos^2(\theta) z + \rho\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=h\left(1-\frac{\rho}{r}\right)} d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho^3\cos^2(\theta) h \left(1 - \frac{\rho}{r}\right) + \rho \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(h\left(1-\frac{\rho}{r}\right)\right)^3 d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} h\cos^2(\theta)\left(\rho^3 - \frac{\rho^4}{r}\right) + \frac{h^3}{3}\left(\rho - \frac{3\rho^2}{r} + \frac{3\rho^3}{r^2} - \frac{\rho^4}{r^3}\right) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ h\cos^2(\theta)\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5r}\right]_0^r + \frac{h^3}{3}\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{r} + \frac{3}{4}\frac{\rho^4}{r^2} - \frac{\rho^5}{5r^3}\right]_0^r \right\} d\theta$$

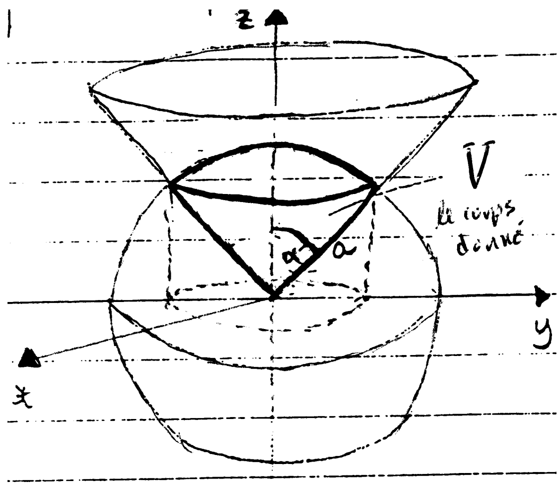
$$= \int_0^{2\pi} h\frac{(1+\cos(2\theta))}{2}\frac{r^4}{20} + \frac{h^3}{3}\frac{r^2}{20} d\theta = \frac{hr^2}{60}\left[3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right) r^2 + h^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{\pi h r^2}{60}(3r^2 + 2h^2)$$

5.4.2

À calculer : Le centre de gravité (centre de masse) du corps délimité par une sphère de rayon a et un cône d'angle au sommet 2α, le sommet coïncidant avec le centre de la sphère. On suppose la densité constante et égale à 1.

Nous allons supposer la sphère centrée à l'origine et l'axe du cône sur l'axe des z.



Soit (x_c, y_c, z_c) les coordonnées du centre de gravité de V.

Il est avantageux d'utiliser les coordonnées sphériques. On a

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^2\sin(\varphi)drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{a^3}{3}\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}(1-\cos(\alpha))d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos(\alpha))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V xdxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\sin(\varphi)drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^3\sin^2(\varphi)\cos(\theta)drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos(\theta)d\theta\cdot\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^3\sin^2(\varphi)drd\varphi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0\cdot \int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^3\sin^2(\varphi)drd\varphi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\int_V\int ydxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r\sin(\varphi)\sin(\theta)r^2\sin(\theta)drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sin(\theta)d\theta\cdot\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^3\sin^2(\varphi)drd\varphi \\
&= 0\cdot\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r^3\sin^2(\varphi)drd\varphi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\int_V\int zdxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} r\cos(\varphi)r^2\sin(\varphi)drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{a^4}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi d\theta = \frac{\pi a^4}{2}\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{\pi a^4}{8}(1-\cos(2\alpha))
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{\int\int_V\int xdxdydz}{\int\int_V\int dxdydz} = 0 \\
y_c &= \frac{\int\int_V\int ydxdydz}{\int\int_V\int dxdydz} = 0 \\
z_c &= \frac{\int\int_V\int zdxdydz}{\int\int_V\int dxdydz} = \frac{\frac{\pi a^4}{8}(1-\cos(2(\alpha)))}{\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos(\alpha))} \\
&= \frac{3}{8}a\frac{1}{2}\frac{(2-2\cos^2(\alpha))}{1-\cos(\alpha)} = \frac{3}{8}a\frac{1-\cos^2(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} \\
&= \frac{3}{8}a(1+\cos(\alpha))
\end{aligned}
$$

5.4.3

À calculer : $\int\int_\sigma [x\cos(\mathbf{n},x) + y\cos(\mathbf{n},z)]\, d\sigma$ où σ est une surface fermée.

La surface σ délimite donc un volume. En supposant que les conditions requises pour la formule de Gauss-Ostrogradsky soient remplies, on obtient

$$\int\int_\sigma [x\cos(\mathbf{n},x) + y\cos(\mathbf{n},y) + z\cos(\mathbf{n},z)]\, d\sigma =$$

$$\int\int_V\int \operatorname{div}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{j})\ dxdydz$$

où V est le volume délimité par σ

$$\begin{aligned} &= \int\int_V\int (1+1+1)\ dxdydz = 3\int\int_V\int dxdydz \\ &= 3\mathrm{vol}(V) \end{aligned}$$

5.4.4

a) **À calculer :** $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$, où $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} - 2yx\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ et S est donnée par la surface représentative de la fonction $z = 2x - y$ au-dessus du rectangle $[0,2]\times[0,2]$

On a

$$\begin{aligned} \int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS &= \int_0^2\int_0^2 \left[-3x^2\frac{\partial}{\partial x}(2x-y) - (-2yx)\frac{\partial}{\partial y}(2x-y) + 8\right] dxdy \\ &= \int_0^2\int_0^2 [-6x^2 - 2yx + 8]dxdy \\ &= \int_0^2 \left[-2x^3 - yx^2 + 8x\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 -4dy \\ &= -8 \end{aligned}$$

b) **À calculer :** $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$, où $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ et S est donnée par la surface représentative de la fonction $z = -x - y - 1$ au-dessus du rectangle $[0,1]\times[0,1]$

On a

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds &= \int_0^1\!\!\int_0^1 \Big[-x\frac{\partial}{\partial x}(-x-y-1)-(-2y)\frac{\partial}{\partial y}(-x-y-1) \\
&\quad + x\,(-x-y-1)\Big]\, dxdy \\
&= \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[x-2y-x^2-xy-x\right] dxdy \\
&= \int_0^1 \left[-2yx-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left[-\frac{5}{2}y-\frac{1}{3}\right] dy \\
&= -\frac{19}{12}
\end{aligned}$$

c) **À calculer :** $\int\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS$, où $\mathbf{F} = x\mathbf{k}$ et S est le disque de rayon 1 centré à l'origine dans le plan des x, y.

Notons que S peut être décrite comme la surface représentative de la fonction $z = 0$ au-dessus du domaine D suivant

On a

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS &= \int\!\!\int_D x dxdy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\cos(\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} r^2\cos(\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos\theta\; d\theta = 0
\end{aligned}$$

d) **À calculer :** $\int\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS$, où $\mathbf{F} = \mathbf{j}$ et S est le disque de rayon 1 centré à l'origine dans le plan des x, z.

On note que le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est constant et perpendiculaire à S. On obtient directement

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS = \text{grandeur de } \mathbf{F}\cdot\ \text{aire(S)} = 1\cdot\pi = \pi$$

5.4.5

a) On a

$$\mathbf{F} = e^z\mathbf{i} - \cos(xy)\mathbf{j} + z^3y\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^z & -\cos(xy) & z^3y \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^3y) - \frac{\partial}{\partial z}(-\cos(xy))\right)\mathbf{i} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^3y) + \frac{\partial}{\partial z}(e^z)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-\cos(xy)) - \frac{\partial}{\partial y}(e^z)\right)\mathbf{k} \\
&= z^3\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + y\sin(xy)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

b) On a

$$\mathbf{F} = xz\cos(x)\mathbf{i} + (-yz\sin(x)\mathbf{j}) + -xy\ \operatorname{tg}(y)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz\cos(x) & -yz\sin(x) & -xy\ \operatorname{tg}(y) \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-xy\ \operatorname{tg}(y) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz\sin(x))\right)\mathbf{i} \\
&\quad + \left(-\frac{\partial}{\partial x}(-xy\ \operatorname{tg}(y)) + \frac{\partial}{\partial z}(xz\cos(x))\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz\sin(x)) - \frac{\partial}{\partial y}(xz\cos(x))\right)\mathbf{k} \\
&= (-x\ \operatorname{tg}(y) - xy\sec^2(y) + y\sin(x))\mathbf{i} + (y\ \operatorname{tg}(y) + x\cos(x))\mathbf{j} \\
&\quad + \ -yz\cos(x)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

c) On a

$$\mathbf{F} = \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{-xz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\mathbf{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\frac{-\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-yz}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\mathbf{j} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\mathbf{k} \\
= \quad & \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\big\{[x(x^2+y^2+z^2)-xy2y \\
&+ x(x^2+y^2+z^2)-xz\cdot 2z]\mathbf{i} \\
&+ [-y(x^2+y^2+z^2)+xy\cdot 2x+y(x^2+y^2+z^2)-yz\cdot 2z]\mathbf{j} \\
&+ [-z(x^2+y^2+z^2)+xz\cdot 2x-z(x^2+y^2+z^2)+yz\cdot 2y]\mathbf{k}\big\} \\
= \quad & \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\{2x^3\mathbf{i}+(2x^2y-2y-2yz^2)\mathbf{j}+-2z^3\mathbf{k}\} \\
= \quad & \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}[x^3\mathbf{i}+(x^2y-yz^2)\mathbf{j}-z^3\mathbf{k}]
\end{aligned}
$$

5.4.6

Par la formule de Stokes

$$\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{rot } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Il suffit de vérifier que dans chaque cas rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

a) On a

$$\mathbf{F} = \frac{1}{y+z}\mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^2}\mathbf{j} - \frac{x}{(y+z)^2}\mathbf{k}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{rot } \mathbf{F} \\
= \quad & \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{-x}{(y+z)^2} & \frac{-x}{(y+z)^2} \end{bmatrix} \\
= \quad & \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{(y+z)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x}{(y+z)^2}\right)\right)\mathbf{i} \\
&+ \left(\frac{-\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(y+z)^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(y+z)}\right)\right)\mathbf{j} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(y+z)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(y+z)}\right)\right)\mathbf{k} \\
= \quad & \left(\frac{2x}{(y+z)^3}-\frac{2x}{(y+z)^3}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{-1}{(y+z)^2}\right)\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(\frac{-1}{(y+z)^2} - \frac{-1}{(y+z)^2}\right)\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

b) On a

$$\mathbf{F} = (yze^x + xyze^x)\mathbf{i} + xze^x\mathbf{j} + xye^x\mathbf{k}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{rot } \mathbf{F} \\
&= \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yze^x + xyze^x & xze^x & xye^x \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xye^x) - \frac{\partial}{\partial z}(xze^x)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-\partial}{\partial x}(xye^x) + \frac{\partial}{\partial z}(yze^x + xyze^x)\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(xze^x) - \frac{\partial}{\partial y}(yze^x + xyze^x)\right)\mathbf{k} \\
&= (xe^x - xe^x)\mathbf{i} + (-(ye^x + xye^x)) + ye^x + xye^x)\mathbf{j} \\
&\quad + (ze^x + xze^x - (ze^x + xze^x))\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

5.4.7

1) On a

$$\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

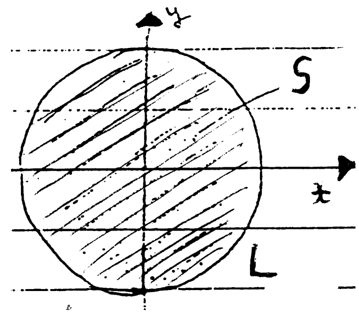
où L est le cercle donné par l'intersection des surfaces d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0.$$

Par la formule de Stokes, on a

$$\int_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz = \int\int_S \text{rot}((y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\, dS$$

où S est la surface délimitée par L.



On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}((y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(z+x)\right)\mathbf{i}+\left(\frac{-\partial}{\partial x}(x+y)+\frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z+x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right)\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int\int_S (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz = \int\int_S \mathbf{0}\cdot\mathbf{n}\ dS = 0$$

2) On a

$$\int_L x^2y^3dx+dz+zdz$$

où L est le cercle donné par l'intersection des surfaces d'équation

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{et} \quad z=0$$

R est une constante positive, $R>0$.
Par la formule de Stokes, on a

$$\int_L x^2y^3dx+dy+zdz = \int\int_S \operatorname{rot}(x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\ dS$$

où S est la surface délimitée par le cercle L
On prend le sens antihoraire pour parcourir L et on prend $\mathbf{n}$ dans la direction de l'axe des z (« orientation positive de l'espace » qui correspond à la règle de la main droite)

S est donnée par la surface représentative de la fonction $z = 0$ au-dessus du disque ci-dessus.

On a

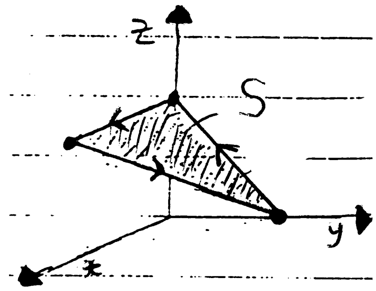
$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\
&\qquad = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(1)\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{\partial(z)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3)\right)\mathbf{j} \\
&\qquad\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(1) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3)\right)\mathbf{k} \\
&\qquad = -3x^2y^2\mathbf{k}
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_L x^2y^3dx + dy + zdz \\
&= \iint_S -3x^2y^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\ dS \\
&= \iint_S -3x^2y^2\ dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^2\cos^2(\theta)\cdot r^2\sin^2(\theta)rdrd\theta \text{ (en passant en coordonnées polaires)} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^5\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)drd\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{R^6}{2}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)d\theta \\
&= -\frac{R^6}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin(2\theta))^2}{4}d\theta = -\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi} 1 - \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta \\
&= -\frac{R^6}{8}\pi
\end{aligned}$$

5.4.8

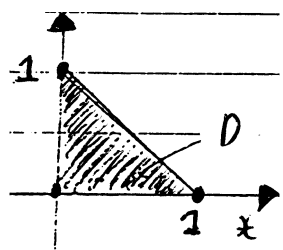
a) On a $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$ et le chemin L qui relie (1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)



On a

$$
\begin{aligned}
&\text{rot } \mathbf{F} \\
&\quad = \text{dét}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \partial x & -y & x+z \end{bmatrix} \\
&\quad = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(-y)\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{\partial}{\partial x}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(2x)\right)\mathbf{j} \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x)\right)\mathbf{k} \\
&\quad = -\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

la surface S délimitée par L peut être décrite par la surface représentative de la fonction $z = -y + 1$ au-dessus du domaine D du plan des x, y

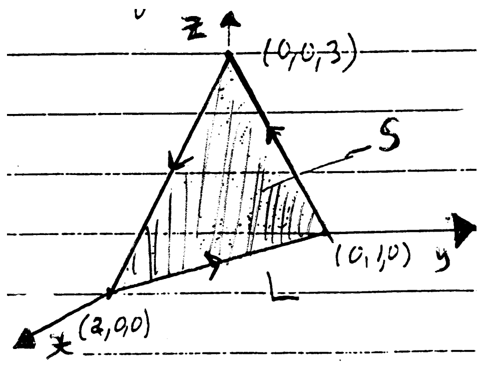


En appliquant la formule de Stokes on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&\quad = \int\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&\quad = \int\int_D \left(-0 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-y+1) - (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(-y+1) + 0\right) dxdy
\end{aligned}
$$

$$= \int\int_D -1 dx dy = \frac{-1}{2}$$

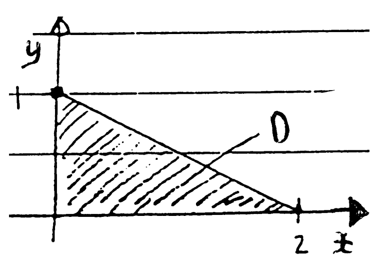
b) On a $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ et le chemin L qui relie (2,0,0),(0,1,0),(0,0,3)



On a

$$\begin{aligned}
&\text{rot } \mathbf{F} \\
&= \text{dét} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xz) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy)\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)\mathbf{k} \\
&= -y\mathbf{i} + -z\mathbf{j} + -x\mathbf{k}
\end{aligned}$$

La surface S délimitée par L peut être décrite par la surface représentative de la fonction $z = -\frac{3}{2}x - 3y + 3$ au-dessus du domaine D du plan des x, y



En appliquant la formule de Stokes on obtient

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int\!\!\int\limits_S \text{rot }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS = \int\!\!\int\limits_D \left[-(-y)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x\cdot 3y+3\right)\right.\\
&\quad - \left(-\left(-\frac{3}{2}x-3y+3\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3}{2}x\cdot 3y+3\right)+-x\left.\vphantom{\frac{3}{2}}\right] dxdy\\
&= \int\limits_0^2\int\limits_0^{-\frac{x}{2}+1}\frac{7}{2}x+\frac{15}{2}y-9dydx\\
&= \int\limits_0^2\left[\frac{7}{2}xy+\frac{15}{2}\frac{y^2}{2}-9y\right]_{y=0}^{y=\frac{-x}{2}+1} dx\\
&= \int\limits_0^2 \frac{7}{2}x\left(\frac{-x}{2}+1\right)+\frac{15}{4}\left(\frac{-x}{2}+1\right)^2-9\left(-\frac{x}{2}+1\right)dx\\
&= \int\limits_0^2 -\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{15}{4}\left(\frac{-x}{2}+1\right)^2-9\left(\frac{-x}{2}+1\right)dx\\
&= \left[-\frac{7}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{15}{4}\left(\frac{-x}{2}+1\right)^3\cdot\frac{-2}{3}+9\left(\frac{-x}{2}+1\right)^2\right]_0^2\\
&= -\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{3}+\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{2}+0+0-\left(0+0-\frac{5}{2}+9\right)\\
&= -\frac{25}{6}
\end{aligned}$$

5.4.9

À voir

$$\oint\limits_{\partial S}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \int\!\!\int\limits_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

Or, par la formule de Stokes on a

$$\oint\limits_{\partial S}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \int\!\!\int\limits_S \text{rot }\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

Puisque rot $\mathbf{H}=\mathbf{J}$, on obtient le résultat voulu.

5.4.10

a) On a $\mathbf{F}(x,y) = x^3\mathbf{i} - x\sin(xy)\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-x\sin(xy)) \\ &= 3x^2 + -x^2\cos(xy) = 3x^2 - x^2\cos(xy)\end{aligned}$$

b) On a $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) = 0$$

c) On a $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{xy}\mathbf{i} - e^{xy}\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(e^{yz}) \\ &= ye^{xy} - xe^{-xy} + ye^{yz}\end{aligned}$$

d) On $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0$$

e) On a $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + (y+\cos(x))\mathbf{j} + (z+e^{xy})\mathbf{k}$

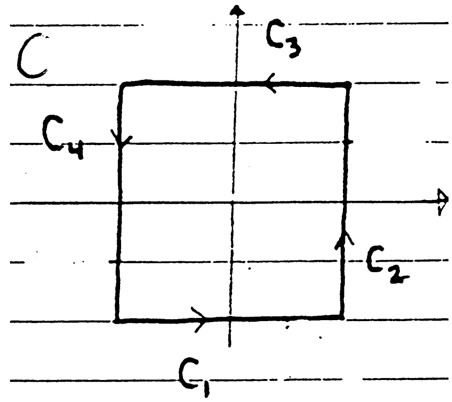
$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y+\cos(x)) + \frac{\partial}{\partial z}(z+e^{xy}) = 1+1+1 \\ &= 3\end{aligned}$$

f) On a $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + (x+y)^2\mathbf{j} + (x+y+z)^2\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}((x+y)^2) + \frac{\partial}{\partial z}((x+y+z)^2) \\ &= 2x + 2(x+y) + 2(x+y+z) \\ &= 6x + 4y + 2z\end{aligned}$$

5.4.11

a) On a $\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$ et le contour



On cherche le fux $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds$. On peut séparer le contour C en quatre parties comme on l'a indiqué sur la figure.
On a les paramétrisation suivantes :

$$\begin{array}{rcr} C_1 : \mathbf{r}(t) = & t\mathbf{i} - \mathbf{j} \ , & -1 \le t \le 1 \\ C_2 : \mathbf{r}(t) = & \mathbf{i} + t\mathbf{j} \ , & -1 \le t \le 1 \\ C_3 : \mathbf{r}(t) = & -t\mathbf{i} + \mathbf{j} \ , & -1 \le t \le 1 \\ C_4 : \mathbf{r}(t) = & -\mathbf{i} + -t\mathbf{j} \ , & -1 \le t \le 1 \end{array}$$

On obtient

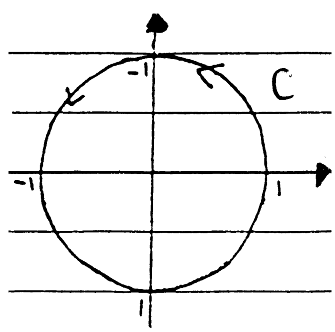
$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds = \int\limits_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds + \int\limits_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds + \int\limits_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds + \int\limits_{C_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds \\ &= \int\limits_{C_1} x^2dy + y^3dx + \int\limits_{C_2} x^2dy + y^3dx + \int\limits_{C_3} x^2dy + y^3dx + \int\limits_{C_4} x^2dy + y^3dx \\ &= \int\limits_{-1}^{1} (t^2\cdot 0 + -1\cdot 1)dt + \int\limits_{-1}^{1} (1\cdot 1 + t^3\cdot 0)dt + \int\limits_{-1}^{1} (t^2\cdot 0 + 1\cdot -1)dt \\ &\quad + \int\limits_{-1}^{1} ((-1)^2\cdot -1 + t^3\cdot 0)dt \\ &= -2+2-2-2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Ou, par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \int\int_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdy, \text{ où } D \text{ est l'intérieur du carré} \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2x - 3y^2) dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} [x^2 - 3y^2x]_{x=-1}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} -6y^2 dy \\
&= [-2y^3]_{y=-1}^{y=1} = -2 - (-2(-1)) \\
&= -4
\end{aligned}$$

b) On a $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$ et le contour



On a la paramétrisation de C :

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \int_C x^3 dy - y^3 dx \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^3(t) \cdot \cos(t) - \sin^3(t) \cdot - \sin(t)] dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (\cos^4(t) + \sin^4(t))dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\cos^3(t)\sin(t)\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt \\
&\qquad - \frac{1}{4}[\sin^3(t)\cos(t)]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \quad \text{(table d'intégrales)} \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t))dt \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} dt \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

ou, par le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$
\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; ds \\
&\quad = \int\int_D \operatorname{div} \mathbf{F}\; dxdy, \quad D = \text{ intérieur du cercle} \\
&\quad = \int\int_D 3x^2 + 3y^2 dxdy \\
&\quad = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot r dr d\theta, \text{ en passant aux coordonnées polaires} \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta \\
&\quad = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

5.4.12

Figure 1 div $\mathbf{F} > 0$, vraisemblablement pour A, div $\mathbf{F} < 0$, vraisemblablement pour B, C.
Figure 2 div $\mathbf{F} > 0$, vraisemblablement pour A, C, div $\mathbf{F} < 0$, vraisemblablement pour B.

5.4.13

a) On a $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

Soit S la surface de la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. On veut calculer le flux $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$

Par la formule de Gauss-Orstrogradsky on a

$$\begin{aligned}
&\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \\
&= \int\int_D\int \mathrm{div}\mathbf{F}\ dxdydz,\ \text{où } D = \text{ intérieur de la sphère délimitée par } S \\
&= \int\int_D\int 3y^2 + 3x^2 + 3z^2\ dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\cdot\rho^2\sin(\varphi)\ d\rho d\varphi d\theta\,;\ \text{en passant aux coordonnées sphériques} \\
&= \frac{3}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\ d\varphi d\theta = \frac{3}{5}\int_0^{2\pi}[-\cos(\varphi)]_0^{\pi}\, d\theta \\
&= \frac{6}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{12\pi}{5}
\end{aligned}$$

b) On a $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

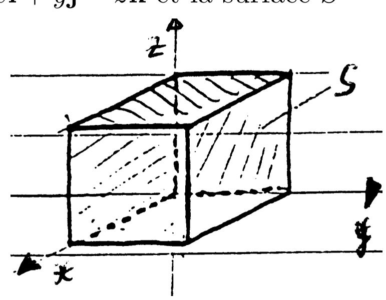
Soit S la surface de la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. On veut calculer le flux $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$

Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iiint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz, \text{ où } D = \text{ intérieur de la sphère délimitée par } S \\
&= \iiint\limits_D (1+1+1)\,dxdydz \\
&= 3\iiint\limits_D \,dxdydz = 3 \text{ volume } (D) \\
&= 3\cdot\frac{4}{3}\pi \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

5.4.14

On a $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ et la surface S



On veut calculer le flux $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$

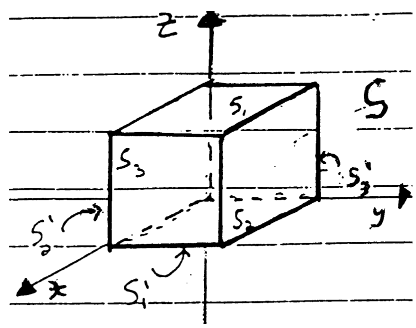
Par le théorème de divergence (ou Gauss-Orstrogradsky) on a

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iiint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz, \text{ où } D \text{ est le volume délimité par } S \\
&= \iiint\limits_D 1+1-1\,dxdydz \\
&= \iiint\limits_D \,dxdydz
\end{aligned}$$

$$= \text{volume } (D)$$
$$= 1$$

On a $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + yj - z\mathbf{k}$ et la surface S d'un cube.

On veut calculer le flux $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ directement. On calcule la contribution des six faces et on additionne. Notons que l'orientation sur chacune des faces doit être vers l'extérieur. On devra en tenir compte dans la méthode de calcul que nous avons vue.



On aura

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$
$$= \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_1 - \int\int_{S_1'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_1' + \int\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_2$$
$$- \int\int_{S_2'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_2' + \int\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_3 - \int\int_{S_3'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS_3'$$

S_1 peut être décrite par la surface représentative de la fonction $z = 1$ au-dessus du domaine $D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

S_1' peut être décrite par la surface représentative de la fonction $z = 0$ au-dessus du domaine $D_1' = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

S_2 peut être décrite par la surface représentative de la fonction $y = 1$ au-dessus du domaine $D_2 = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

S_2' peut être décrite par la surface représentative de la fonction $y = 0$ au-dessus du domaine $D_2' = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

S_3 peut être décrite par la surface représentative de la fonction $x = 1$ au-dessus du domaine $D_3 = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

S_3' peut être décrite par la surface représentative de la fonction $x = 0$ au-dessus du domaine $D_3'\{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

On doit interchanger le rôle des variables dans la méthode de calcul que nous avons vue pour S_2, S_2', S_3, S_3'.

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_1 &= \iint_{D_1} -1 dxdy = \int_0^1\int_0^1 -dxdy = -1 \\
\iint_{S_1'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_1' &= \iint_{D_1'} -(0) dxdy = 0 \\
\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_2 &= \iint_{D_2} 1\cdot dxdz = \int_0^1\int_0^1 dxdz = 1 \\
\iint_{S_2'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_2' &= \iint_{D_2'} 0\cdot dxdz = 0 \\
\iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_3 &= \iint_{D_3} 1\cdot dydz = \int_0^1\int_0^1 dydz = 1 \\
\iint_{S_3'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_3' &= \iint_{D_3'} 0\cdot dydz = 0
\end{aligned}
$$

On obtient

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = -1 - 0 + 1 - 0 + 1 - 0 = 1$$

5.4.15

1) On a

$$\iint_S (xdydz + ydzdx + zdxdy)dS$$

où S est la surface de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Cette intégrale de surface est, dans une autre notation, l'intégrale du champ de vecteur $\mathbf{F}$ à travers S où

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{j}$$

Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint\limits_{D} \operatorname{div}\mathbf{F}\ dxdydz, \text{ où } D \text{ est le volume délimité par } S \\
&= \iiint\limits_{D} (1+1+1)\ dxdydz \\
&= 3\iiint\limits_{D} dxdydz \\
&= 3 \text{ volume } (D) \\
&= 3\cdot\frac{4}{3}\pi abc \\
&= 4\pi abc
\end{aligned}
$$

2) On a

$$\iint\limits_{S} (x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy)dS$$

où S est la surface de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$. Cette intégrale est, dans une autre notation, l'intégrale du champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

à travers S. Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

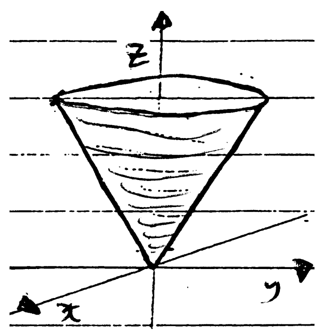
$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS \\
&= \iiint\limits_{D} \operatorname{div}\mathbf{F}\ dxdydz, \text{ où } D \text{ est le volume délimité par } S \\
&= \iiint\limits_{D} (3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2\rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\theta, \text{ en passant aux coordonnées sphériques} \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{5}\sin(\varphi)d\varphi d\theta \\
&= \frac{3}{5}\int_0^{2\pi} [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\pi} d\theta = \frac{3}{5}\int_0^{2\pi} 2d\theta
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{5}\cdot 2\cdot 2\pi \\ &= \frac{12\pi}{5} \end{aligned}$$

3) On a

$$\int\!\!\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

où S est la surface du cône d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$, pour $0\le z\le b$.



Cette intégrale est, dans une autre notation, l'intégrale du champ de vecteur

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

à travers S. Notons que S n'est pas une surface fermée de sorte qu'on ne peut appliquer la formule de Gauss-Ostrogradsky directement. « Complétons » S en ajoutant le disque de rayon a centré à l'origine dans le plan $z=b$, et appelons S' cette nouvelle surface

On a

$$\int\!\!\int_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\int\!\!\int_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int\!\!\int_{S''} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

où S'' est le disque qu'on a ajouté

$$\int\!\!\int_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\!\!\int_{S''} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS'' - \int\!\!\int_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS'$$

N.B. On doit changer le signe car l'orientation change quand on intègre sur S seule : la normale est alors vers le haut, alors que sur S' elle est vers l'extérieur et vers le bas.

Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS'
&= \iiint\limits_{D} \mathrm{div}\mathbf{F}\; dxdydz, \text{ où } D \text{ est le volume délimité par } S' \\
&= \iiint\limits_{D} 2x+2y+2z\; dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\frac{b}{a}r}^{b} (2r\cos(\theta)+2r\sin(\theta)+2z) r dz dr d\theta \text{ (coordonnées cylindriques)} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left[(2r^2\cos(\theta)+2r^2\sin(\theta))z+z^2r\right]_{z=\frac{b}{a}r}^{z=b} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \Big[2r^2\cos(\theta)+2r^2\sin(\theta)b+b^2r-2\frac{b}{a}r^3\cos(\theta) \\
&\quad - 2\frac{b}{a}r^3\sin(\theta)-\frac{b^2}{a^2}r\Big]\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[2b\frac{a^3}{3}\cos(\theta)+2b\frac{a^3}{3}\sin(\theta)+\frac{b^2a^2}{2} \\
&\quad - 2\frac{b}{a}\frac{a^4}{4}\cos(\theta)-2\frac{b}{a}\frac{a^4}{4}\sin(\theta)-\frac{b^2}{a^2}\Big]\, d\theta \\
&= \Big[\frac{2}{3}ba^3\sin(\theta)-\frac{2}{3}ba^3\cos(\theta)+\frac{b^2a^2}{2}\theta-\frac{ba^3}{2}\sin(\theta) \\
&\quad + \frac{ba^3}{3}\cos(\theta)-\frac{b^2a^2}{4}\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \frac{a^2b^2\pi}{2}
\end{aligned}$$

On peut intégrer directement sur S'' : ce disque peut être décrit par la surface représentative de la fonction $z=b$ au-dessus du disque de rayon a centré à l'origine dans le plan des x,y. On obtient

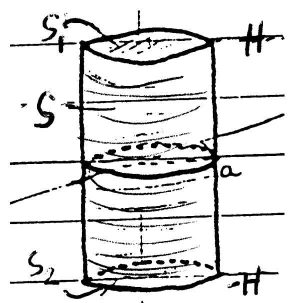
$$\iint\limits_{S''} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS'' = \iint\limits_{D''} -\frac{\partial}{\partial x}(b)\cdot x^2-\frac{\partial}{\partial y}(b)y^2+b^2\; dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{D''} b^2 \; dxdy \\
&= b^2 \pi a^2
\end{aligned}
$$

En mettant tout ensemble, on obtient

$$\int\int\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS = a^2 b^2 \pi - \frac{a^2 b^2 \pi}{2} = \frac{a^2 b^2 \pi}{2}$$

4) On a $\int\int\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdz$, où S est la surface du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, avec $-H \leq z \leq H$. Cette intégrale est, dans une autre notation, l'intégrale du champ de vecteurs $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ à travers S. Notons que S n'est pas une surface fermée de sorte qu'on ne peut pas appliquer la formule de Gauss-Ostrogradsky directement. « Complétons » S en ajoutant le disque de rayon a centré à l'origine dans le plan $z = H$ et dans le plan $z = -H$. Appelons S' cette nouvelle surface.



On a

$$\int\int\limits_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS' = \int\int\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS + \int\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS_1 - \int\int\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS_2$$

N.B. On doit changer le signe car l'orientation change quand on intègre sur S_2 seule : la normale est alors vers le haut, alors que sur S' elle est pointée vers l'extérieur et vers le bas

$$\int\int\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS = \int\int\limits_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS' - \int\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS_1 + \int\int\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS_2$$

Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on a

$$\begin{aligned}
\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS' \\
&= \iiint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\; dxdydz,\ \text{ où } D \text{ est le volume délimité par } S' \\
&= \iiint_D (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_D\; dxdydz \\
&= 3 \text{ volume } (D) \\
&= 6\pi a^2 H
\end{aligned}$$

S_1 est décrite par la surface représentative de la fonction $z = H$ au-dessus du disque D_1 de rayon a centré à l'origine dans le plan des x, y. On obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_1 &= \iint_D \left(-\frac{\partial(H)}{\partial x}x - \frac{\partial(H)}{\partial y}y + H\right) dxdy \\
&= H\iint_{D_1} dxdy = \pi a^2 H
\end{aligned}$$

S_2 est décrite par la surface représentative de la fonction $z = H$ au-dessus du disque D_1 (ci-dessus). On obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS_2 &= \iint_{D_1} \left(-\frac{\partial(-H)}{\partial x}x - \frac{\partial(-H)}{\partial y}y + -H\right) dxdy \\
&= -H\iint_{D_1} dxdy = -H\pi a^2
\end{aligned}$$

Finalement

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 6\pi a^2 H - \pi a^2 H - \pi a^2 H = 4\pi a^2 H$$

5.4.16

On a un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y, z)$ et un domaine de l'espace D tels que $\mathbf{F}$ est toujours tangent à la frontière ∂D de D. Ceci entraîne que, en un point (x, y, z) sur ∂D, un champ $\mathbf{F}(x, y, z)$ est toujours parallèle au plan tangent en (x, y, z), donc toujours perpendiculaire à la direction normale à ∂D. Ainsi, sur ∂D on aura toujours $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, où $\mathbf{n}$ désigne un vecteur normal unitaire.

Or, par la formule de Gauss-Orstrogradsky on a

$$\int\int_D\int \mathrm{div}\mathbf{F}\; dxdydz \quad = \int_\partial\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS$$

et par la remarque précédente le flux $\int_\partial\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS$ sera nécessairement nul, d'où l'égalité

$$\int\int_D\int \mathrm{div}\mathbf{F}\; dxdydz = 0$$

5.4.17

a) On a la transformation

$$\begin{aligned} x &= t^2 + s^2 \\ y &= t^2 - s^2 \end{aligned}$$

le jacobien est égal[1] à

$$\begin{aligned} & \text{dét} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(t^2 + s^2) & \frac{\partial}{\partial s}(t^2 + s^2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - s^2) & \frac{\partial}{\partial s}(t^2 - s^2) \end{bmatrix} \\ = \; & \text{dét} \begin{bmatrix} 2t & 2s \\ 2t & -2s \end{bmatrix} \\ = \; & -8ts \end{aligned}$$

Au point $(t, s) = (1, 2)$, le jacobien vaut $-8 \cdot 1 \cdot 2 = -16$.

b) On a la transformation

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= uv \end{aligned}$$

le jacobien est égal à

$$\begin{aligned} & \text{dét} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u + v) & \frac{\partial}{\partial v}(u + v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(uv) & \frac{\partial}{\partial v}(uv) \end{bmatrix} \\ = \; & \text{dét} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix} \\ = \; & u - v \end{aligned}$$

[1]N.B. Il faut choisir un ordre des variables ; d'habitude c'est l'ordre alphabétique.

Au point $(u,v)=(5,-3)$, le jacobien vaut $5-(-3)=8$.

5.4.18

On a la transformation

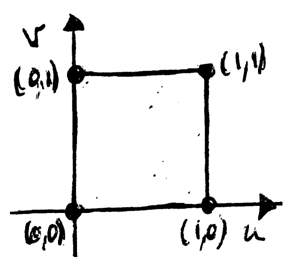
$$\begin{array}{rcl} x & = & u-v \\ y & = & u+v \end{array}$$

a) Le jacobien de cette transformation est

$$\begin{array}{rl} & \text{dét}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u-v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \end{bmatrix} \\ = & \text{dét}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = & 2 \end{array}$$

b) On a $\{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1\}$

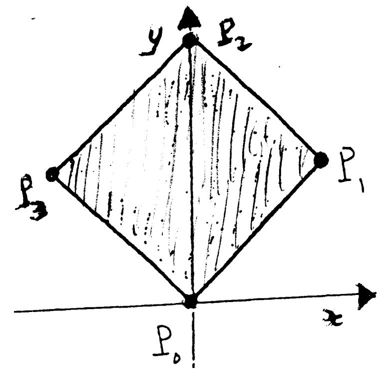
Dans le plan des (u,v) c'est le carré unité



On note que

$$\begin{array}{l} (u,v)=(0,0) \text{ correspond à } (x,y)=(0,0) \quad = P_0 \\ (u,v)=(1,0) \text{ correspond à } (x,y)=(1,1) \quad = P_1 \\ (u,v)=(1,1) \text{ correspond à } (x,y)=(0,2) \quad = P_2 \\ (u,v)=(0,1) \text{ correspond à } (x,y)=(-1,1) = P_3 \end{array}$$

On constate aussi que les points à l'intérieur du carré ci-dessus correspondent à des points à l'intérieur du quadrilatère P_0, P_1, P_2, P_3 dans le plan des x, y



N.B. L'aire de ce quadrilatère est égal à 2, qui est aussi la valeur du jacobien. Le changement de coordonnée transforme un carré d'aire 1 en un quadrilatère d'aire 2 ; c'est le facteur de changement d'échelle.

5.4.19

On doit transformer les intégrales doubles en effectuant le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= u - uv \\ y &= uv \end{aligned}$$

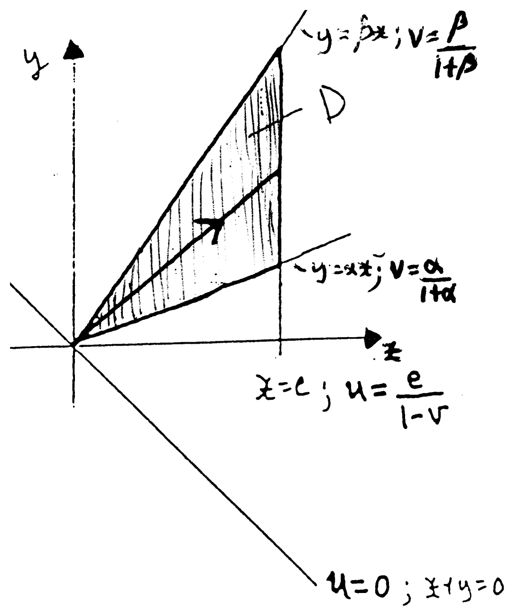
Le jacobien de cette transformation est

$$\begin{aligned} & \text{dét} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u-uv) & \frac{\partial}{\partial v}(u-uv) \\ \frac{\partial}{\partial u}(uv) & \frac{\partial}{\partial v}(uv) \end{bmatrix} \\ = & \text{ dét} \begin{bmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{bmatrix} \\ = & \ u \end{aligned}$$

On doit aussi exprimer le domaine d'intégration en termes des nouvelles coordonnées u, v. Pour cela, il est utile de considérer la transformation inverse qui permet d'exprimer u, v en fonction de x, y. On a

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= \frac{y}{x+y} \end{aligned}$$

a) On note que $y = \frac{v}{1-v}\ x$



<u>Disons $0 \leq \alpha < \beta$</u>

On note que $y = \beta x$ correspond à $\dfrac{v}{1-v} = \beta$, c'est-à-dire $v = \dfrac{\beta}{1+\beta}$

De même, $y = \alpha x$ correspond à $v = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ et v varie de $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ à $\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

Pour v fixé, u varie de e jusqu'à la droite $x = e$ qui s'exprime par u comme fonction de v : $u = \dfrac{e}{1-v}$.

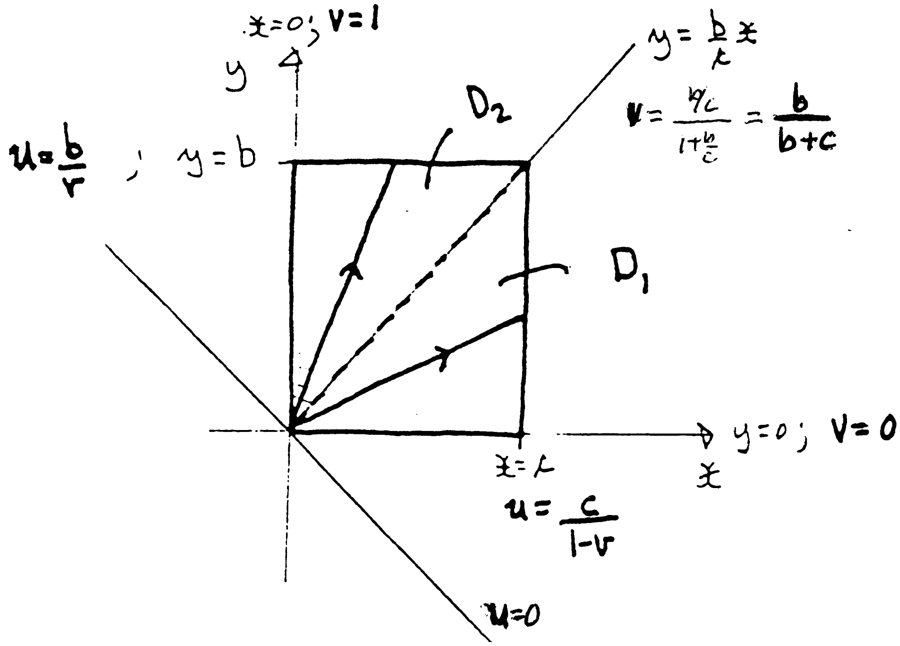
Ainsi

$$D = \left\{(u,v) : \frac{\alpha}{1+\alpha} \leq v \leq \frac{\beta}{1+\beta},\ 0 \leq u \leq \frac{e}{1-v}\right\}$$

On obtient

$$\int_0^e \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dydx = \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_0^{\frac{e}{1-r}} f(u-uv, uv)u\ dudv$$

b) On a $\int\limits_0^c \int\limits_0^b f(x,y)dxdy$.



<u>Disons $b > c > 0$</u>

Le domaine d'intégration D est

L'expérience de a) suggère de séparer le domaine D en deux parties D_1, D_2 par la diagonale du rectangle D (voir la figure)

On note que $y = c$ correspond à $u = \dfrac{c}{v}$

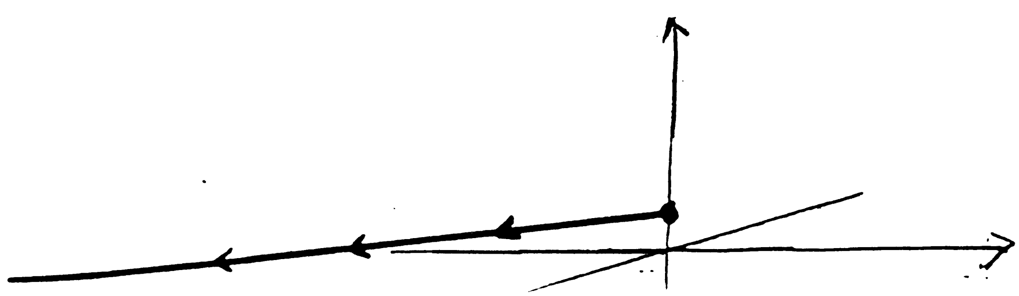
$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(u,v) :\ 0 \le v \le \frac{b}{b+c},\ 0 \le u \le \frac{c}{1-v}\right\} \\ D_2 &= \left\{(u,v) :\ \frac{b}{b+c} \le v \le 1,\ 0 \le u \le \frac{b}{v}\right\} \end{aligned}$$

On obtient

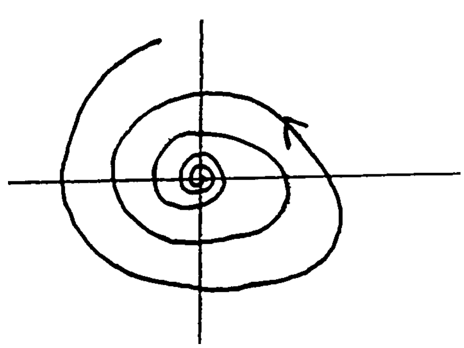
$$\begin{aligned} \int_0^c \int_0^b f(x,y)dydx &= \int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)ududv \\ &\quad + \int_{\frac{b}{b+c}}^{1} \int_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv, uv)ududv \end{aligned}$$

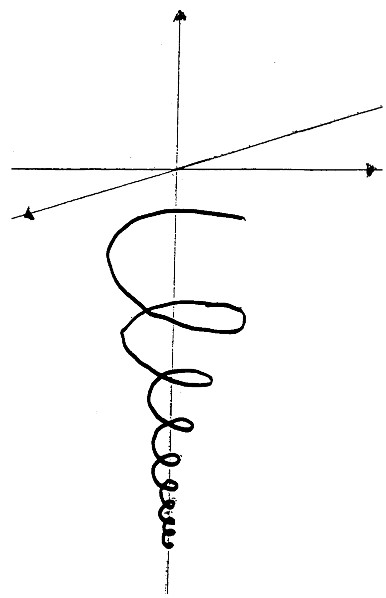
ANNEXE

5.1.1
a)

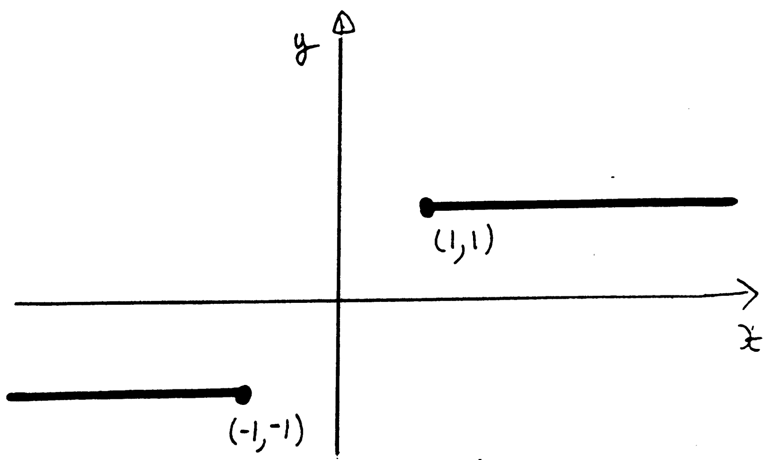


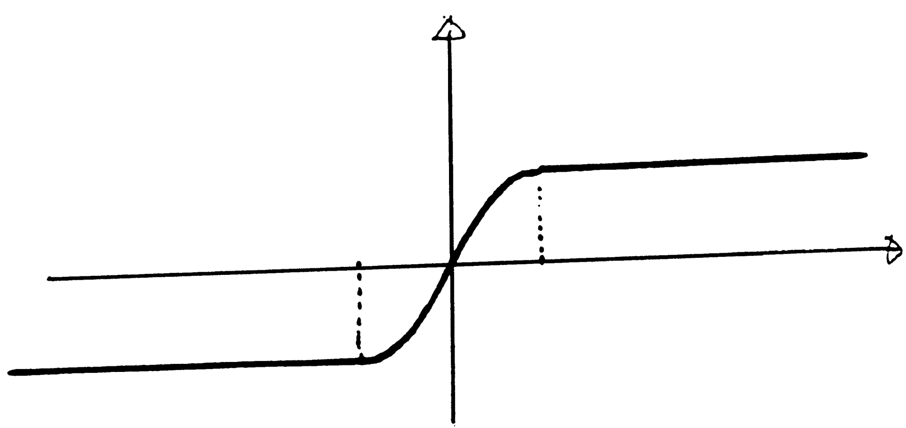
5.1.1
d)



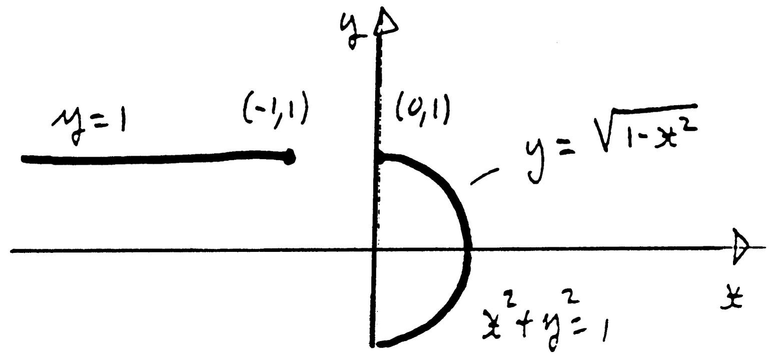


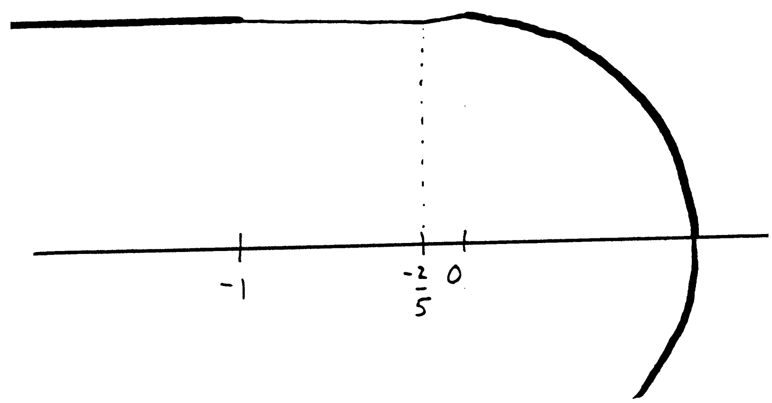
5.1.11



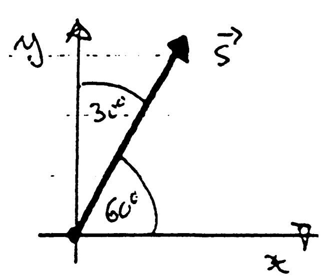


5.1.12

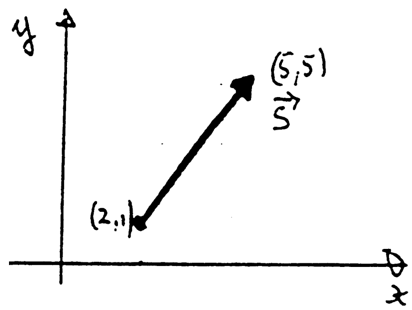




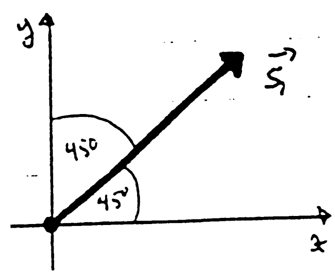
5.2.11
1)



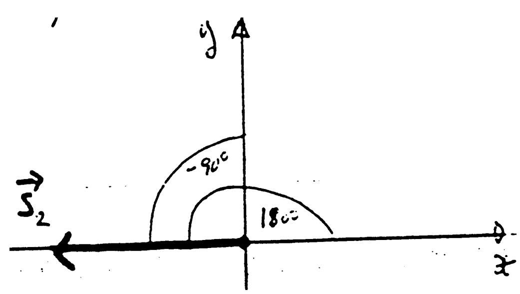
2)



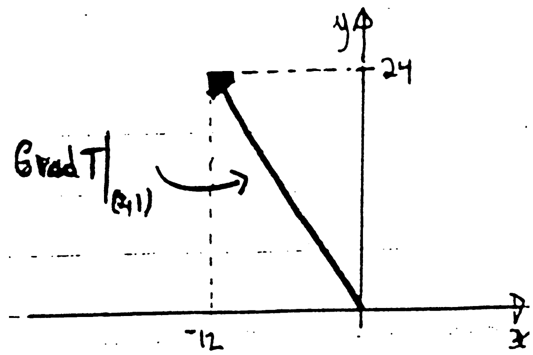
3) a)



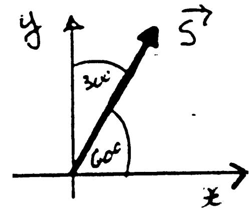
b)



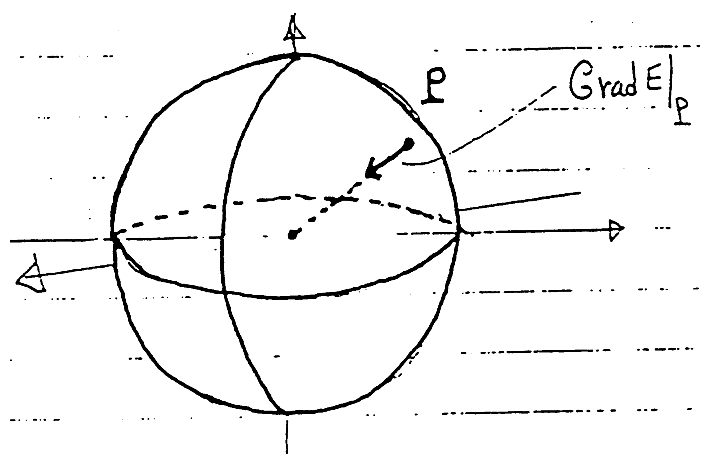
5.2.12
a)



c)



5.2.16
b)



5.2.21