Introduction à Albert Lautman (1908–1944)

Mathieu Bélanger

Séminaire de logique, UQAM, 27 février 2008

Au programme

Quelques indications biographiques

- Naissance à Paris (IX^{e} arrondissement) le 8 février 1908.
- Études secondaires à Marseille
- Études au Lycée Condorcet où il fait la rencontre de Jacques Herbrand (1908–1931).

Lautman philosophe

- Études de philosophie à l'École Normale Supérieure.
- Intérêt envers les mathématiques et la logique mathématique.
- Séjours à Berlin, à Vienne et au Japon au début des années 1930.
- Obtention d'un Doctorat d'État en 1937 sous la direction de Léon Brunschvicg :
  - Thèse principale : *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique.*
  - Thèse complémentaire : *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel.*
- Intérêt marqué pour la physique vers la fin de sa vie.

Lautman héros de guerre

- Mobilisé, il est nommé capitaine et est décoré de la Croix de guerre.
- Il est fait prisonnier en juin 1940.
- Il s'échappe avec 28 autres prisonniers par un tunnel de 80 mètres qu'ils ont creusé au cours des 9 mois précédents. 16 réussiront.

Lautman héros de guerre (suite)

- Il s'installe à Toulouse et s'implique dans l'Armée secrète à partir de 1942.
- Il devient rapidement un des responsables de l'État-major Haute-Garonne et organise parallèlement des passages vers l'Espagne pour le réseau O'Leary.
- Il est arrêté le 15 mai 1944 par la police allemande d'occupation et fusillé le 1er août 1944 à Bordeaux.
- Il est décoré à titre posthume de la médaille de la Résistance, de la *British Medal Order* et de la *Medal of Freedom*.
- À Toulouse, la première rue débaptisée pour porter un nom de résistant deviendra la rue Albert Lautman.

Les mathématiques françaises des années 1920–1930

- Jusqu'au début des années 1930, les philosophes français ne s'intéressent guère au renouveau de la philosophie des mathématiques que marquent les recherches de Cantor, Russell, Frege, Hilbert, etc.
- La philosophie des mathématiques se résume à *Les Étapes de la philosophie mathématique* de Brunschvicg.
- La mathématique française se concentre sur l'analyse.
- Il n'y a que peu d'intérêt envers les nouvelles questions que soulèvent la logique et la théorie des ensembles.

Le renouveau des mathématiques françaises

- Avec l'arrivée des Weil, Herbrand, Cartan, Chevalley et Dieudonné, les mathématiques françaises se renouvellent.
- La nouvelle mathématique s'intéresse à l'algèbre abstraite et à la topologie algbérique.
- Une vision unifiée des mathémamatiques se développe.
- Lautman acquièrt sa culture mathématique dans le contexte de ce renouveau.

Les sources de la pensée de Lautman

- Léon Brunschvicg
- Jean Cavaillès et Jacques Herbrand
- Hilbert
- Russell, Wittgenstein, Carnap et le Cercle de Vienne.
- La tradition philosophique occidentale : Platon, Leibniz, Kant, Heidegger, etc.
- Les mathématiques contemporaines
- La physique contemporaine

Principaux écrits de Lautman

- Considérations sur la logique mathématique (1934 ?)
- Mathématiques et réalité (1935)
- De la Réalité inhérente aux théories mathématiques (1937)
- Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel (1937)
- Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique (1937)
- Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques (1939)
- Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique : le problème du temps (1946)

Les thèmes de la philosophie mathématique de Lautman

- La métaphysique mathématique
- L'unité des mathématiques
- L'interaction de la physique et des mathématiques

La métaphysique mathématique

La question de la réalité des mathématiques

- La problématique au cœur de la thèse principale est celle de la réalité mathématique :

  > *Ce livre est né du sentiment que dans le développement des mathématiques s'affirme une réalité que la philosophie mathématique a pour fonction de reconnaître et de décrire.* (p. 23)

- Lautman s'oppose véhément aux conceptions syntaxiques de la réalité mathématique des Russell, Wittgenstein, Carnap, etc.
  - Les mathématiques ne sont pas un jeu de symboles dépourvu de signification.
  - Cette conception élimine l'idée même d'une réalité mathématique.

Critique des conceptions syntaxiques

On tend souvent à confondre la philosophie mathématique avec l'étude des différents formalismes logiques. Cette attitude entraîne généralement comme conséquence l'affirmation du caractère tautologique des mathématiques. Les édifices mathématiques qui apparaissent au philosophe si difficiles à explorer, si riches de résultats et harmonieux dans leurs structures ne contiendraient en fait de réalité rien de plus que n'en renferme le principe d'identité. Nous voudrions montrer comment il est possible au philosophe d'écarter de si pauvres conceptions et de trouver au sein des mathématiques une réalité qui satisfasse pleinement l'attente qu'il a d'elles. (« De la Réalité inhérente aux théories mathématiques », p. 287)

La caractérisation de la réalité mathématique

Lautman reconnaît dans la philosophie mathématique de son époque deux méthodes susceptibles de caractériser la réalité mathématique :

1. La conception dynamique héritée de Brunschvicg et de son livre *Les Étapes de la philosophie mathématique*.
2. La conception structurale inspirée par Hilbert.

La conception dynamique des mathématiques

- Les mathématiques se caractérisent par la façon dont elles se laissent appréhender et organiser.
- Les mathématiques sont l'oeuvre de l'intelligence dans son effort de comprendre la matière sur laquelle elle travaille et de résoudre les problèmes qu'elle y rencontre.
- Les mathématiques se développent donc à mesure que les mathématiciens la développent.

La conception structurale des mathématiques

- La réalité mathématique est caractérisée axiomatiquement.
- « Les mathématiques se présentent ainsi comme des synthèses successives où chaque étape est irréductible à l'étape antérieure. » (p. 26)
- L'analyse des propriétés logiques d'une théorie mathématique exige la superposition d'une métamathématique :

  > *La théorie mathématique reçoit ainsi sa valeur des propriétés métamathématiques que sa structure incarne.* (p. 27)

- L'armature logique d'une théorie est donnée par les notions cohérence et de complétude.

Une apparente opposition

Les conceptions dynamique et structurale semblent en opposition :

- Conception dynamique :
  - Une théorie mathématique est indissociable des étapes temporelles de son élaboration.
  - Une théorie mathématique possède une puissance infinie d'expansion et de liaison avec les autres.
- Conception structurale :
  - Une théorie mathématique est un tout achevé indépendant du temps.
  - Les théories mathématiques sont des êtres distincts les uns des autres.

Le projet de Lautman

Nous voudrions cependant, dans les pages qui vont suivre, essayer de développer une conception de la réalité mathématique où s'allient la fixité des notions logiques et le mouvement dont vivent les théories. (p. 27)

Une approche de la réalité mathméatique

Il nous a paru cependant possible d'envisager d'autres notions logiques, susceptibles également d'être éventuellement reliées l'une à l'autre au sein d'une théorie mathématique et qui sont telles, que contrairement aux cas précédents, les solutions mathématiques des problèmes qu'elles posent puissent comporter une infinité de degrés. Des résultats partiels, des rapprochements arrêtés à mi-chemin, des essais qui ressemblent encore à des tâtonnements, s'organisent sous l'unité d'un même thème, et laissent apercevoir dans leur mouvement une liaison qui se dessine entre certaines idées abstraites, que nous proposons d'appeler dialectiques. (p. 28)

Une nouvelle armature logique

- Lautman remplace la structure logique hilbertienne par d'autres notions logiques. Ces notions s'organisent en paires antithétiques :
  - le local vs le global
  - les propriétés intrinsèques vs les propriétés extrinsèques
  - le parfait vs l'imparfait
  - le continu vs le discontinu
- Les paires antithétiques participent à une dialectique qui donne lieu à deux types de schémas qui régissent le développement des mathématiques :
  - les schémas de structure
  - les schémas de genèse

Les schémas de structure

- Lautman développe trois schémas de structure :
  1. Le global et le local
  2. L'intrinsèque et l'extrinsèque
  3. Le parfait vs l'imparfait
- Par exemple, le schéma du global et du local se retrouve dans ces trois théories mathématiques :
  - la géométrie différentielle et ses rapports avec la topologie
  - la théorie des groupes clos
  - la théorie de la représentation approchée des fonctions.

Dialectique et dualité dans les schémas de structure

- Comme l'illustre les problèmes de la métrisation et du prolongement, il existe une *dualité* entre les paires antithétiques : le mouvement du tout vers la partie ne peut être considéré indépendamment du mouvement de la partie vers le tout.
- Les paires antithétiques ne sont donc pas en opposition, mais représentent « des pôles de tension au sein d'une même structure (…) » (Dieudonné, « Avant-propos », p. 17)
- La mathématique unifie chacun des pôles dans une liaison dialectique.
- Les schémas de structure garantissent l'intégrité logique des mathématiques dans leur développement.

Schémas de structure et schémas de genèse

Les études que nous venons de poursuivre au cours de ces trois chapitres nous montrent ainsi la variété des liaisons logiques qui se manifestent au sein des mathématiques. La solidarité du tout et de ses parties, la réduction des propriétés de relation en propriétés intrinsèques, le passage de l'imperfection à l'absolu, voilà autant d'essais d'organisation structurale qui confèrent aux être mathématiques un mouvement vers l'achèvement par quoi on peut dire qu'ils existent. Mais cette existence ne se manifeste pas seulement en ce que la structure de ces êtres imite les structures idéales auxquelles ils se laissent comparer ; il se trouve que l'achèvement d'un être soit en même temps genèse d'autres êtres, et ce sont là des relations logiques entre l'essence et l'existence où s'inscrit le schéma de créations nouvelles.
(p. 82)

Les schémas de genèse

- Lautman développe trois schémas de genèse :
  - la genèse immédiate
  - les mixtes
  - les êtres exceptionnels
- Les schémas de genèse sont des modes de liaison entre des structures et l'existence d'êtres mathématiques.
- Les schémas de genèse sont responsables du développement dans le temps des mathématiques. Les structures dialectiques jouent un rôle dans la création de nouveaux êtres mathématiques.

Les schémas de genèse (suite)

- Le schéma de genèse immédiate se retrouve dans :
  - les théorèmes d'existence en théorie des fonctions algébriques
  - les théorèmes d'existence en théorie du corps de classe
  - la théorie de la représentation des groupes.
- Par exemple, dans le schéma de genèse immédiate, « les êtres créés y procèdent directement du domaine de base, et (...) d'un genre de l'être à un autre genre, il y a ainsi passage immédiat. ». (p. 106)

Dialectique interne et dialectique idéale

- À la dialectique interne aux mathématiques se superpose une dialectique idéale, c'est-à-dire une dialectique entre des Idées abstraites.

  > *Une des thèses essentielles de cet ouvrage affirme en effet la nécessité de séparer la conception supramathématique du problème des liaisons que soutiennent entre elles certaines notions et la découverte mathématique de ces liaisons effectives au sein d'une théorie.* (p. 123)

- Cette dialectique idéale se manifeste dans la pratique mathématique elle-même :

  > *Nous avons essayé (...) de montrer, sur quelques exemples, comment dans les mathématiques, se réalisaient de façon concrète les relations idéales d'une dialectique abstraite et supérieure aux mathématiques.* (« Nouvelles Recherches... », p. 204)

Réponse à la question de la réalité mathématique

- Lautman examine quatre solutions au problème de la réalité mathématique :
  1. les faits mathématiques
  2. les êtres mathématiques
  3. les théories mathématiques
  4. les Idées qui dominent les théories mathématiques.
- Réponse de Lautman : la réalité mathématique se pose au niveau des théories.

  > *La réalité mathématique ne réside donc pas dans les différences qui sépareraient les êtres achevés des êtres inachevés, les êtres parfaits des êtres imparfaits ; elle réside plutôt dans la possibilité de déterminer les uns à partir des autres, c'est-à-dire dans la théorie mathématique où s'affirment ces liaisons.* (p. 138)

Une conception platoniste de la réalité

Que ce soit donc en étudiant les relations qui unissent certains êtres à d'autres ou certains êtres à certains axiomes, nous voyons que le problème de la réalité mathématique ne se pose ni au niveau des faits, ni à celui des êtres, mais à celui des théories. À ce niveau, la nature du réel se dédouble ; nous avons montré en effet au cours des chapitres qui précèdent comment les théories mathématiques sont susceptibles d'une double caractérisation, l'une qui porte sur le mouvement propre de ces théories, l'autre sur les liaisons d'idées qui s'incarnent dans ce mouvement. Ce sont là deux éléments distincts dont la réunion constituent à notre avis la réalité inhérente aux mathématiques (...) (p. 140)

Le platonisme de Lautman

- La réalité mathématique vient donc de la participation des théories aux Idées de la dialectique idéale :

  > *La réalité inhérente aux théories mathématiques leur vient de ce qu'elles participent à une réalité idéale qui est dominatrice par rapport à la mathématique, mais qui n'est connaissable qu'à travers elle.* (« De la réalité inhérente aux théories mathématiques », p. 290)

- La relation entre les Idées et les mathématiques :

  > *Nous n'entendons pas par Idées des modèles dont les êtres mathématiques ne seraient que des copies, mais au véritable sens platonicien du terme, des schémas de structure selon lesquels s'organisent les théories effectives.* (« Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques », p. 204)

Les Idées comme « problématiques pures »

La philosophie mathématique, telle que nous la concevons, ne consiste donc pas tant à retrouver un problème de logique de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour dégager le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence de cette théorie. Une expérience spirituelle est ainsi de nouveau attachée à l'effort de l'intelligence pour créer ou comprendre, mais cette expérience a un autre contenu que la mathématique qui se fait en même temps qu'elle. (p. 142)

L'unité des mathématiques

Le thème de l'unité des mathématiques

Lautman s'inspire de Weyl pour développer une opposition entre les mathématiques classiques et les mathématiques modernes :

> *[Weyl] affirme de la façon la plus nette l'existence d'une division essentielle dans les mathématiques contemporaines ; il faudrait en effet distinguer l'une de l'autre la mathématique « classique » qui, partant de la notion de nombre entier aboutit à l'analyse, et la mathématique « moderne » qui s'opposant à la mathématique des nombres, affirme au contraire le primat de la notion de domaine par rapport aux nombres attachés à ce domaine.* (p. 156)

Les mathématiques classiques

- Par mathématiques classiques, Lautman désigne les mathématiques du XIX$^{\text{e}}$ siècle et/ou celles qui tournent autour de l'analyse.
- Les mathématiques classiques sont constructivistes :
  - Les nombres réels et complexes sont générés à partir des nombres entiers.
  - Les opérations de l'analyse sont définies à partir de celles de l'arithmétique.

Les mathématiques modernes

- Les mathématiques modernes s'intéressent « à la structure globale d'un "tout". » (p. 157)
- Le modèle des mathématiques modernes est l'algèbre abstraite et la présentation qu'en donne van der Waerden.
- Les mathématiques modernes sont axiomatiques :
  - Les axiomes d'une structure donnée déterminent la totalité des éléments de cette structure.
  - Les objets mathématiques ne sont plus nécessairement construits à partir de l'arithmétique des nombres entiers.
  - La nature de ces éléments est arbitraire : nombres, vecteurs, opérateurs, matrices, etc.

Conséquences de l'axiomatisation sur la conception moderne des mathématiques

Les mathématiques modernes se distinguent des mathématiques classiques par les quatre aspects caractéristiques suivants :

1. Priorité de la structure globale d'un domaine par rapport aux nombres attachés à ce domaine.
2. Priorité de la notion de domaine sur celle de nombre.
3. Possibilité de multiplications non commutatives.
4. Caractère fini et discontinu des structures algébriques. En particulier, les classes d'équivalence permettent souvent de ramener une infinité d'éléments à un nombre fini de classes.

La question de l'unité des mathématiques

*Les méthodes et les conceptions fondamentales de l'algèbre moderne étant ainsi distinguées de celles de l'analyse, on peut chercher à interpréter le sens de cette dualité qui apparaît profondément installée au sein des mathématiques contemporaines. Est-ce une dualité essentielle entre théories irréductibles les uns [*sic*] aux autres ou bien n'est-ce qu'une dualité de méthodes susceptibles d'être un jour rapprochées ?* (p. 160)

Réponses possibles à la question de l'unité

- L'opposition entre la théorie des fonctions complexes et l'algèbre serait plus profonde qu'une simple question de méthodes. (Weyl, *Gruppentheorie und Quanten Mechanik*, 1928)
- Il existerait une méthode d'élaboration conjointe de l'algèbre et de l'analyse. (Hilbert, « Wesen und Ziele einer Analysis der unendliche Gleichungssysteme », 1909)

L'unité des mathématiques selon Lautman

Selon Lautman, les mathématiques modernes sont engagées dans l'unification de l'algèbre et de l'analyse :

> *Nous nous proposons dans les pages qui vont suivre de montrer comment la mathématique moderne est engagée dans la voie de cette unification de l'algèbre et de l'analyse et ceci par la pénétration de plus en plus poussée des méthodes structurales et finitistes de l'algèbre dans le domaine de l'analyse et du continu. En somme le conflit des méthodes entre l'algèbre et l'analyse se dissiperait au profit de l'algèbre ; la distinction des deux mathématiques de Weyl semble ainsi ne correspondre qu'aux conditions historiques du développement des mathématiques et laisser intacte l'unité des mathématiques et l'unité de l'intelligence.*
> (p. 160)

L'argument en faveur de cette conception de l'unité

Lautman considère quatre situations. Chacune reprend un des aspects caractéristiques de l'algèbre moderne et montre que cet aspect se retrouve également en analyse moderne.

1. L'influence de la structure « dimensionnelle » d'un ensemble sur le mode de décomposition individuelle des éléments en théorie des fonctions.
2. Le rôle des métriques non euclidiennes dans la théorie des fonctions analytiques.
3. L'intervention de l'algèbre non commutative en théorie des équations différentielles.
4. La considération de structures algébriques finies et discontinues pour déterminer l'existence de fonctions de variable continue.

Considérations dimensionnelles en analyse

Lautman distingue deux types de décomposition :

1. Le premier mode étudie un objet mathématique isolément de façon à mettre en lumière ses propriétés particulières.
   - Exemple : décomposition arithmétique d'un nombre entier en un produit de ses facteurs premiers.
2. Le second mode étudie tous les objets mathématiques appartenant à un même ensemble en fonction de la structure dimensionnelle de cet ensemble et réfléchit donc les propriétés de la structure globale de celui-ci.
   - Exemple : décomposition algébrico-géométrique d'un vecteur dans un espace vectoriel à n dimensions.

Un exemple

- Les deux espèces de décomposition se retrouvent en algèbre :
  - Le théorème fondamental de l'algèbre
  - Les décompositions « imposées » en termes d'éléments de base d'un corps commutatif.
- En algèbre, les décompositions de seconde espèce sont étroitement liées à la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires.
- En analyse, ce lien permet de passer d'une décomposition de premier type à une décomposition de second type : en vertu du théorème de Riemann-Roch, une fonction analytique ayant des pôles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dépend d'un système de $n - p$ équations algébriques qui forment une base pour cet espace.

Complémentarité des deux modes de décomposition

Dans les mathématiques modernes, cette dualité de méthodes n'implique pas l'existence de deux mathématiques.

> *Les exemples que nous avons donnés nous permettent ainsi de comprendre que s'il y a des modes de pensée différents en mathématiques, il est peu vraisemblable qu'à ces différences de méthodes correspondent des différences de domaines. La dualité des types de décomposition sur laquelle nous avons insisté (...) est un fait certain qui s'impose à tout observateur, mais cette dualité n'aboutit pas à constituer deux mathématiques différentes, celle qui serait une promotion de l'arithmétique des nombres entiers et celle qui serait une extension de l'algèbre. Les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est la rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques. »* (p. 172)

Mathématiques classiques et mathématiques modernes

L'argument de Lautman réfute que mathématiques classiques et mathématiques modernes soient deux démarches opposées et irréductibles :

> *Nous avons montré dans l'Introduction de cet ouvrage comment la distinction des deux mathématiques de Weyl tendait à opposer à l'analyse de l'infini les méthodes synthétiques de l'algèbre moderne. Nous avons ensuite montré (. . .) que cette distinction ne doit pas être conçue dans le sens d'une opposition essentielle entre disciplines irréductibles, puisqu'il est possible de retrouver dans les théories modernes de l'analyse les points de vue qui caractérisent l'algèbre.* (p. 195)

L'unité des mathématiques contemporaines

- Le continu — le point de vue des mathématiques classiques — et le discontinu — le point de vue des mathématiques modernes — sont deux façons différentes d'étudier une même réalité mathématique.
- La mathématique contemporaine utilise l'une ou l'autre des méthodes pour étudier la réalité mathématique.
- Lautman voit dans cette dualité le témoignage de l'unité des mathématiques.

Conceptions classiques de la dualité

- Deux positions classiques sur le continu et le discontinu :
  1. Priorité du discontinu et du fini : le continu émane du discontinu et l'infini émane du fini par enrichissement progressif du discontinu et du fini.
  2. Priorité du continu et de l'infini : le fini et le discontinu sont une limitation ou une approximation du continu et de l'infini.
- Ces conceptions classiques posent problème :

  En cherchant à faire naître l'infini par dilatation du fini ou le fini par rétrécissement de l'infini, on considère toujours en extension le fini comme une partie de l'infini et l'on ne peut que se heurter à l'impossibilité d'épuiser l'infini. (p. 197)

Conception moderne de la dualité

Les mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle suggèrent une troisième façon de concevoir les rapports entre l'analyse et l'algèbre, le continu et le discontinu et entre le fini et l'infini :

> *Une attitude bien différente est celle de beaucoup de mathématiciens contemporains qui voient dans le fini et l'infini non pas les deux termes d'un passage à opérer, mais deux genres d'êtres distincts, doués chacun d'une structure propre, et susceptibles de soutenir entre eux des rapports d'*imitation *ou d'*expression*. Nous entendons par rapports d'*imitation *les cas où la structure interne de l'infini* imite *celle du fini, et par rapports d'*expression *les cas où la structure d'un domaine fini et discontinu* enveloppe *l'existence d'une autre domaine continu ou infini qui se trouve ainsi* exprimer *l'existence de ce domaine fini auquel il est adapté.* (p. 197)

L'unité et le platonisme

En s'attachant ainsi chaque fois, non pas à la quantité des éléments, mais à l'existence ou l'armature des ensembles que l'on compare, on découvre ainsi entre le fini et l'infini des analogies de structures et des adaptations réciproques, d'où il résulte que l'unité des mathématiques est essentiellement celle des schémas logiques qui président à l'organisation de leurs édifices. (...) Notre [thèse] tend en effet à montrer qu'il est possible de retrouver au sein des théories mathématiques des Idées logiques incarnées dans le mouvement même de ces théories. Les analogies de structures et les adaptations d'existences que nous avons essayé de décrire ici entre l'analyse et l'algèbre n'ont d'autre but que de contribuer à mettre en lumière l'existence au sein des mathématiques de schémas logiques, qui ne sont connaissables qu'à travers les mathématiques elles-mêmes, et en assurent à la fois l'unité intellectuelle et l'intérêt spirituel. (p. 198)