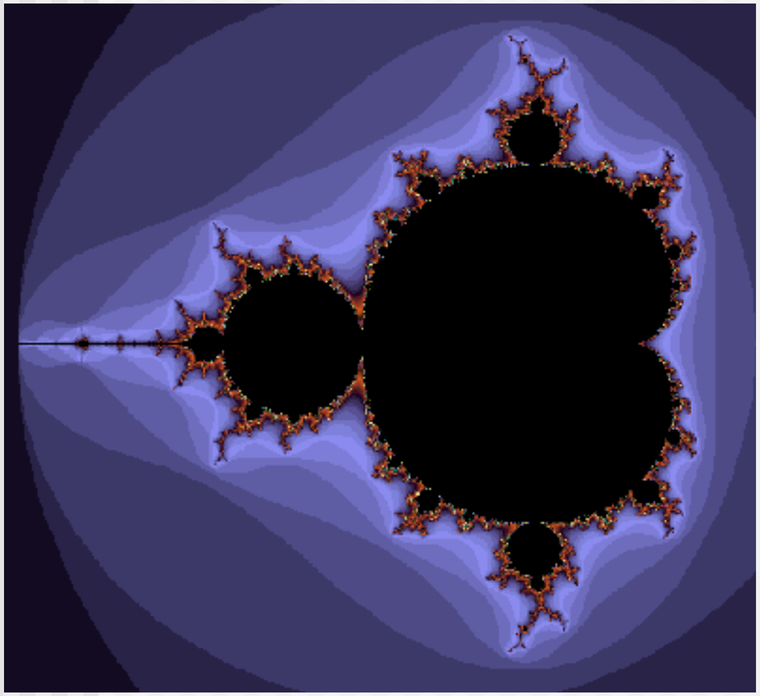
Technologie et (enseignement des) mathématiques: quand l'outil influence l'objet d'étude



André Boileau
UQAM

Congrès de l'AMQ
Trois-Rivières, 13 octobre 2007

Résumé

J’ai toujours aimé cette métaphore (attribuée à Georges Polya) comparant les mathématiques à une automobile, l’intuition à son accélérateur, et la rigueur à ses freins : une voiture sans accélérateur est complètement inutile, mais une voiture sans freins est très dangereuse !

Dans cet atelier, nous discuterons de l’impact de la technologie sur le délicat équilibre entre l’intuition (ainsi placée « sous stéroïdes ») et la rigueur (ayant parfois besoin d’être éclairée, sinon renforcée), et des conséquences sur l’enseignement des mathématiques.

Plan de la présentation

- La technologie nous permet d’explorer des univers mathématiques
- Mais les représentations ainsi produites ne sont pas toujours fidèles
- On doit apprendre à reconnaître et contrôler ces « effets secondaires »
- Ceci a des conséquences dans notre enseignement

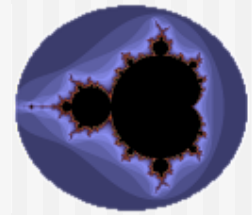
Plan de la présentation

- La technologie nous permet d’explorer des univers mathématiques
- Mais les représentations ainsi produites ne sont pas toujours fidèles
- On doit apprendre à reconnaître et contrôler ces « effets secondaires »
- Ceci a des conséquences dans notre enseignement

Univers mathématiques explorés via la technologie

- Ensemble de Mandelbrot ▷
- Fonctions itérées, doublements de périodes et chaos ▷
- Quand le hasard produit une complexité accompagnée de régularités ▷
- Simulation de systèmes physiques simples au comportement complexe ▷

Ensemble de Mandelbrot



- Explorer un univers: les joies du zoom
  - Après un zoom maximum, l'image initiale mesurerait 1/10 d'année-lumière
  - Notez cependant la perte de précision quand on agrandit « trop »
- Définition via fonctions complexes *itérées*

$$\boxed{\begin{array}{l} f_c(z) = z^2 + c \\ 0 \mapsto f_c(0) \mapsto f_c\big(f_c(0)\big) \mapsto \cdots \end{array}}$$

Fonctions réelles itérées

- *Itération* de fonctions réelles simples

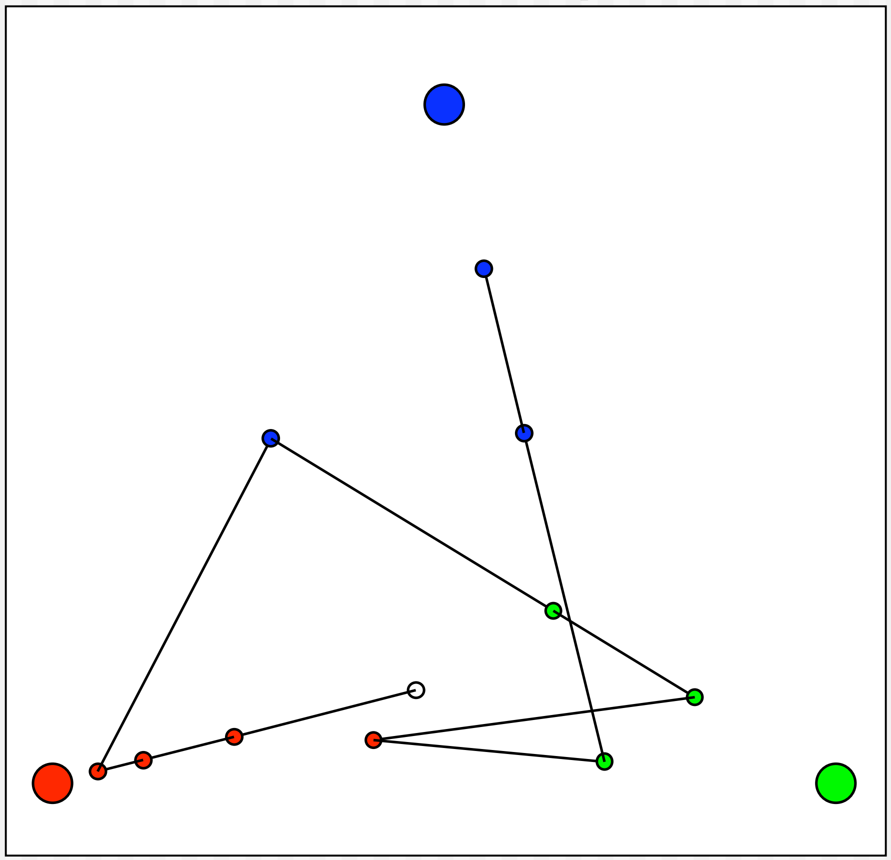
$$f(x) = \lambda x(1-x)$$

$$x_0 \mapsto f(x_0) \mapsto f\big(f(x_0)\big) \mapsto \cdots$$

- La technologie permet d'illustrer facilement plusieurs phénomènes
  - Convergence
  - Comportements périodiques (périodes de longueurs 2, puis 4, puis …)
  - Chaos

Hasard régulé
→ structures complexes

- Jeu du chaos: description d'un exemple



Simulations physiques

- Parfois, on ne peut trouver de solutions explicites décrivant le mouvement
  - Exemple: pendules (simple, double, etc.)
- L'expérimentation nous permet d'observer la situation (mais influence de facteurs externes)
- La technologie nous permet aussi d'observer des simulations (mais sont-elles fiables ?)

Plan de la présentation

- La technologie nous permet d'explorer des univers mathématiques
- Mais les représentations ainsi produites ne sont pas toujours fidèles
- On doit apprendre à reconnaître et contrôler ces « effets secondaires »
- Ceci a des conséquences dans notre enseignement

Limitations technologiques: impacts sur nos explorations

- Représentations finies d'objets infinis
  - Exemple: la série harmonique
- Instabilité numérique, effet papillon, chaos
  - Exemple: la suite de Muller
- Interprétations parfois délicates
  - Exemple: le triangle de Sierpinski

La série harmonique

- On sait que la série harmonique diverge

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\left(\frac{1}{2^{d-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{d}}\right)+\cdots$$

$$>1+1\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots+2^{d-1}\left(\frac{1}{2^{d}}\right)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

- Si on faisait un calcul informatique… (calcul avec *d* chiffres binaires)

$$S=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\left(\frac{1}{2^{d-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{d}}\right)+0<1+d$$

- Et si on n'avait pas su à l'avance que la série divergeait ?

La suite de Muller

« Considérons la suite (a_n) définie comme suit:

$$a_0 = \frac{11}{2} \qquad a_1 = \frac{61}{11} \qquad a_{n+2} = 111 - \frac{1130}{a_{n+1}} + \frac{3000}{a_n a_{n+1}}$$

La limite de (a_n) est 6. Pourtant, sur n'importe quelle machine, on observera une convergence **rapide** de cette suite vers 100... Cet exemple montre que même lorsqu'en machine on observe une "bonne convergence" qui semble rapide, sans qu'aucun résultat intermédiaire ne s'approche de zéro ou de l'infini (risques de dépassement de capacité), le résultat observé est sujet à caution. »

J.-M. Muller, *Arithmétique des ordinateurs: opérateurs et fonctions élémentaires* , Masson, 1989, pp.48-49.

$$a_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$$

Le triangle de Sierpinski

- Jeu du chaos : si *le point initial* est en dehors du triangle de Sierpinski, alors **tous les points suivants** le seront aussi.
- Dans quel sens peut-on dire qu'on obtient une représentation fidèle ?

Plan de la présentation

- La technologie nous permet d’explorer des univers mathématiques
- Mais les représentations ainsi produites ne sont pas toujours fidèles
- On doit apprendre à reconnaître et contrôler ces « effets secondaires »
- Ceci a des conséquences dans notre enseignement

Reconnaître, apprivoiser et contrôler les effets secondaires

- Nouvel équilibre entre approches
  - Expérimentale (via Calculatrices, Cabri, Excel) [numérique, graphique, approximative]
  - Déductive (via Maple, Mathematica, Derive) [symbolique, exacte, parfois indécidable]
- Surprenant: Lemme de l'ombre
- Expliquer correctement des phénomènes observés (vg. triangle de Sierpinski)

Nouvel équilibre expérimental vs déductif

- Exemple: suite de Muller
  - Difficultés de l'approche numérique inexacte
  - Approche numérique exacte possible
    - Mise au jour de régularités
    - Aide à la démonstration
  - Dans d'autres cas, approche symbolique
    Exemple: factorisation de $x^n - 1$
- Plus délicat dans l'enseignement
  Voir, plus tard, le cas des paramètres et de Cabri

Lemme de l'ombre

- Présentation du lemme
- Donc, dans certains cas, même s'il y a « effet papillon », les représentations informatiques ont du sens
- Exemple: la suite de Muller
  - Généralisation

$$M(0,a,b)=a \qquad M(1,a,b)=b \quad \left[\text{Suite originale : } a=\tfrac{11}{2} \quad b=\tfrac{61}{11}\right]$$

$$M(n+2,a,b)=111-\frac{1130}{M(n+1,a,b)}+\frac{3000}{M(n,a,b)M(n+1,a,b)}$$

  - Passage d'une suite à une autre

$$M(n,a,b)\rightarrow M(n,b,c) \quad \text{avec} \quad c=M(2,a,b)$$

$$M(n+1,a,b)=M(n,b,c)$$

Jeu du chaos
et triangle de Sierpinski

- **Interprétation**
  Si P_0, P_1, … , P_n, … sont les points engendrés par le « jeu du chaos », et si on définit les ensembles
  $$\mathcal{E}_n = \{P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots\}$$
  alors on a que la suite des ensembles $\mathcal{E}_n$ tend vers le triangle de Sierpinski avec une probabilité égale à 1.

Plan de la présentation

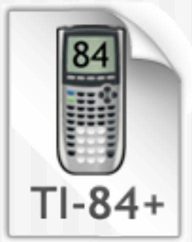
- La technologie nous permet d'explorer des univers mathématiques
- Mais les représentations ainsi produites ne sont pas toujours fidèles
- On doit apprendre à reconnaître et contrôler ces « effets secondaires »
- Ceci a des conséquences dans notre enseignement

Conséquences pédagogiques

- La technologie ouvre de nombreuses possibilités, nouvelles et enrichissantes
- « La technologie permet de sauver du temps » ?
  De nouvelles connaissances et habiletés (techniques **et** mathématiques) sont requises
  - S'attendre et savoir expliquer les limitations de nos outils
  - Quand on « voit » que la dérivée n'existe pas…
- « La technologie permet de faire moins de technique et plus de compréhension » ?
  Ce n'est pas toujours le résultat observé
  - Paramètres des familles de fonctions
  - « Cabri dispense de preuves » !

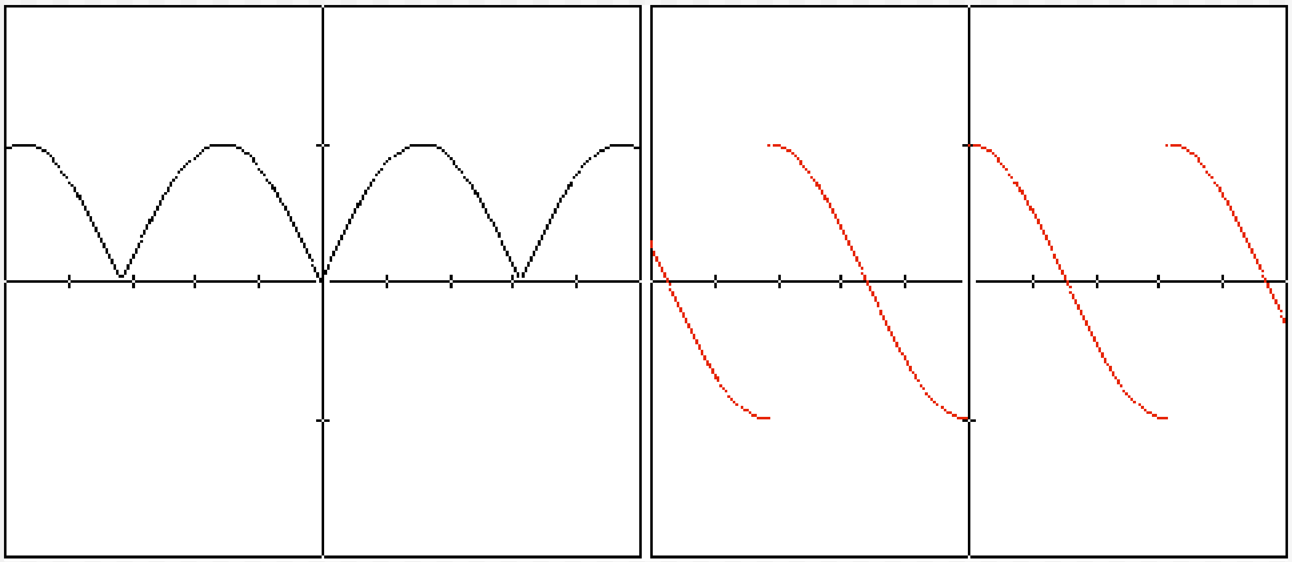
Maîtriser les limites des outils

- Limites des représentations numériques
- Limites des représentations graphiques



- Savoir qu'on peut parfois les contourner Exemple: passer à un calcul
  - numérique ou symbolique **exact**
  - numérique **à précision multiple**

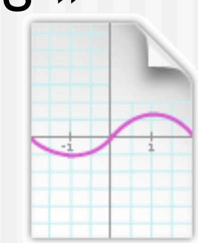
Bien expliquer ce que l'on voit



« Comme la fonction dérivée saute en certains points, elle n'existe pas en ces points »

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

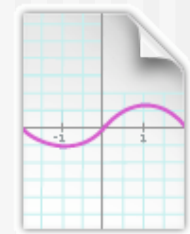
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$



Le cas des paramètres

- Au secondaire, l'attention portée à l'étude des paramètres d'une famille de fonctions

$$a \cdot f\big(b(x-h)\big)+k$$

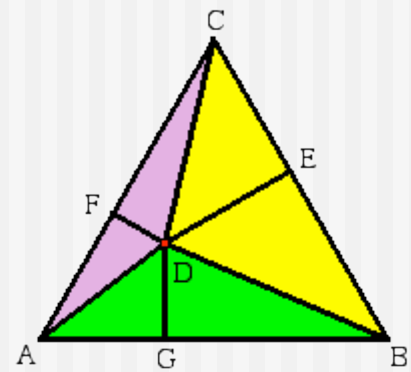


  semble plus grande depuis l'arrivée de la technologie
- Mais cette étude reste très souvent expérimentale, et même basée sur un très petit nombre d'observations

« Cabri dispense de preuves »

- Expérimentation sérieuse donnant lieu à une « certitude pratique »
- Dans ce cas, une explication apporte une compréhension

$$aire(\Delta ABC) = aire(\Delta DAB) + aire(\Delta DBC) + aire(\Delta DCA)$$
$$= \tfrac{1}{2} c(DG + DE + DF)$$
$$DE + DF + DG = \frac{2aire(\Delta ABC)}{c} = hauteur(\Delta ABC)$$



- Mais une telle explication est parfois difficile à trouver (pour les élèves, et même les profs)

Références

Page Web associée à cet atelier
www.math.uqam.ca/_boileau/AMQ2007.html

- Présentation PowerPoint
- Fichiers utilisés dans les exemples
- Références aux logiciels utilisés