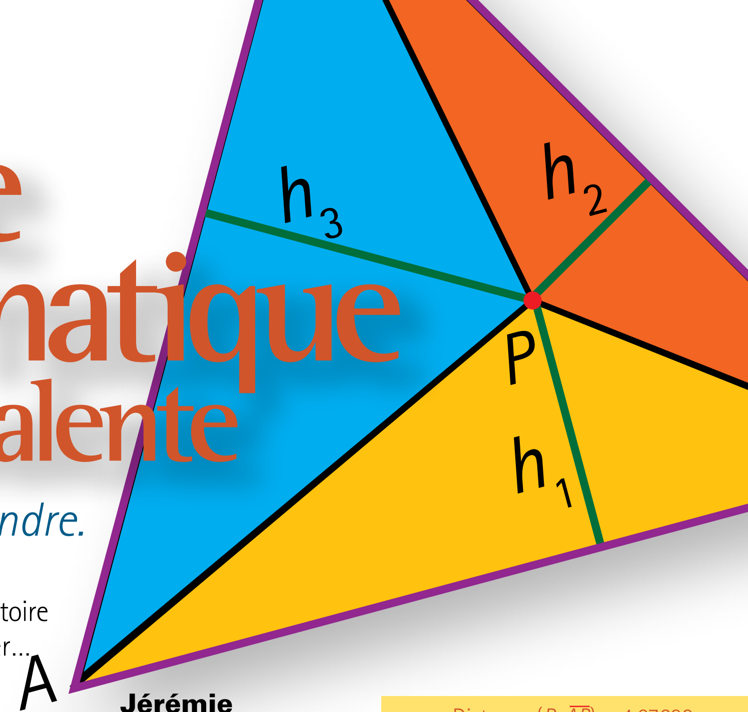
Découverte mathématique à la polyvalente

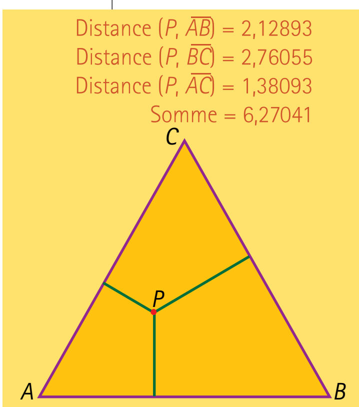


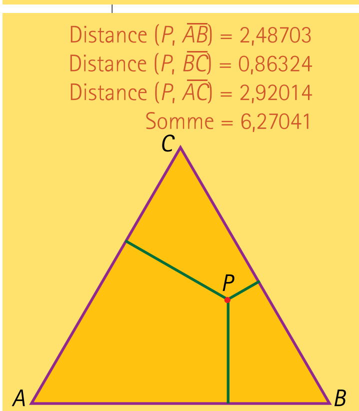
Vérifier n'est pas comprendre.

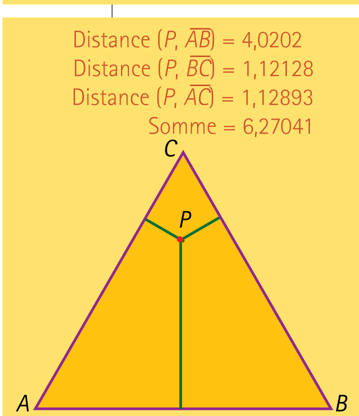
André Boileau
Département de mathématiques
UQAM

Jérémie
Catherine! Avant qu'on sorte du laboratoire d'info, j'ai quelque chose à te montrer… Imagine-toi donc, je viens de faire une découverte mathématique.

Catherine
Tu m'intrigues… Montre-moi ça!







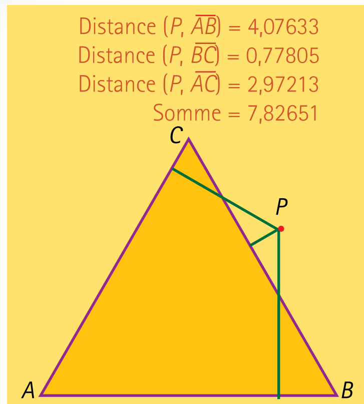
Jérémie
J'ai commencé par tracer un triangle équilatéral *ABC*, tu sais avec ses trois côtés de même longueur. Puis, j'ai pris un point *P* à l'intérieur du triangle, et j'ai calculé la distance[1] de *P* à chacun des trois côtés de mon triangle.

Catherine
Jusque-là, il n'y a rien de bien sorcier…

Jérémie
Attends! Quand je fais la somme des trois distances, elle ne change pas, même quand je fais bouger le point *P*.

Catherine
(déplaçant le point *P* avec la souris)[2]
Tu as bien raison! Même si les trois distances changent comme des folles, leur somme reste inchangée. Une minute! La somme change quand le point *P* sort du triangle…

Jérémie
Oui, je l'avais déjà constaté. En fait, en éloignant *P* du triangle, la somme peut devenir aussi grande qu'on veut…



Catherine
C'est bien beau tout ça, mais est-ce que tu as trouvé une preuve que ça fonctionne toujours?

Jérémie
Pas besoin de preuve ! On voit bien que ça va toujours marcher !

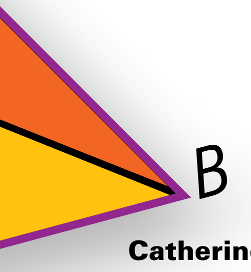
Catherine
Moi aussi, je suis convaincue que le résultat est toujours vrai. Mais en mathématiques, on a besoin de preuves.

Jérémie
Et pourquoi donc ?

Catherine
Parce qu'on veut être certain que ç'est vrai.

Jérémie
Dis-moi donc ce qui pourrait clocher dans mon expérience ?

1. *Rappelons que la distance d'un point P à un segment (ou à une droite) est la longueur du segment issu de P et arrivant perpendiculairement sur le segment (ou la droite) en question. Dans la figure ci-dessus, les distances de P aux trois côtés du triangle sont donc les longueurs des trois segments perpendiculaires issus de P.*
2. *On peut réaliser les expériences décrites dans le texte, en allant à la page Web suivante :* http://www.math.uqam.ca/_boileau/accromath.html



Catherine
Bien, tout d'abord, le logiciel qu'on utilise nous permet de déplacer le point *P* sur tous les points de l'écran, c'est-à-dire sur tous les pixels. Mais c'est bien loin de couvrir tous les cas possibles!

Jérémie
Qu'est-ce que tu veux dire?

Catherine
Tu sais bien que, mathématiquement parlant, il y a une infinité de points à l'intérieur de ton triangle. Mais le logiciel ne permet d'en tester qu'un nombre fini. Tu avoueras que c'est bien peu!

Jérémie
C'est vrai! Mais ce serait quand même bien surprenant si la somme des distances n'était pas toujours constante, alors qu'elle l'est pour tous les points de l'écran.

Catherine
Je l'admets. Je te l'ai déjà dit : je suis convaincue que la somme est toujours constante. Je veux simplement être certaine que c'est bien le cas. Laisse-moi jouer à l'avocate du diable pour un instant. Si on explorait, de façon semblable, tous les points de l'écran de l'ordinateur, on pourrait être tenté de conclure que les coordonnées de ces points sont toujours des nombres rationnels. Mais on sait très bien qu'en réalité, il y a beaucoup de points pour lesquels ce n'est pas le cas, comme $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ ou $(1, \pi)$.

Jérémie
J'avoue que tu marques un point.

Catherine
Et, en plus, il y a possiblement un autre problème. Quand le logiciel calcule la somme des distances, il utilise les puces de l'ordinateur, qui travaillent avec une vingtaine de décimales : les calculs ne sont donc pas rigoureusement exacts.

Jérémie
Là, tu exagères! Si la somme des distances variait, on le verrait forcément!

Catherine
Laisse-moi, encore une fois, jouer à l'avocate du diable.

Jérémie
Décidément, tu aimes ça!

Catherine
Imagine que la somme n'est pas vraiment constante, mais varie plutôt très légèrement, avec des écarts de l'ordre de 10^{-50}. Ces différences seraient tout à fait indétectables par l'ordinateur.

$$10^{-50} = \frac{1}{10^{50}} = \frac{1}{100000000000000000000000000000000000000000000000000}$$

Jérémie
Tu as raison, encore une fois! Mais ça me semble bien peu probable.

Catherine
À moi aussi. Mais ce n'est pas complètement impossible...

Jérémie
Ouais... En fin de compte, je n'ai pas découvert grand chose!

Catherine
Au contraire, tu as fait une très belle découverte! Et c'est pour ça qu'elle mérite d'être explorée davantage. On devrait en parler au prof de maths, pour voir ce qu'elle en pense...

Le lendemain matin

Catherine
Jérémie, j'ai quelque chose à te montrer!

Jérémie
Qu'est-ce que c'est?

Catherine
J'ai réussi à faire une preuve de ta découverte d'hier.

Elle lui tend quelques feuilles[3]. Jérémie regarde longuement tout ça, puis...

3. *Les calculs de Catherine sont disponibles à la page Web citée précédemment : http://www.math.uqam.ca/_boileau/accromath.html*

Jérémie
Ça me semble bien long et bien compliqué! Fais-moi donc un résumé.

Catherine
J'ai utilisé les coordonnées des sommets du triangle et du point P à l'intérieur de celui-ci pour calculer explicitement la somme des distances. Et j'arrive à la conclusion que celle-ci est toujours égale à $c\sqrt{3}/2$, où c est la longueur de chacun des côtés du triangle. Et comme cette valeur ne dépend pas des coordonnées du point P, elle reste donc constante peu importe la position de P.

Jérémie
À mon tour de jouer à l'avocat du diable! Qu'est-ce qui me dit qu'il n'y a pas une erreur dans tes calculs?

Catherine
Tu peux vérifier...

Jérémie
Je suis loin d'être un expert en maths, et toi non plus d'ailleurs : on n'est encore qu'au secondaire! Il pourrait très bien avoir une ou plusieurs erreurs sans qu'on les découvre.

Catherine
On pourrait soumettre mes calculs à des experts... D'ailleurs voilà justement Louise, notre chère prof de maths, qui arrive. On va lui demander ce qu'elle pense de tout ceci.

Ils racontent leur démarche à Louise, qui expérimente à l'ordinateur la découverte de Jérémie, pour ensuite examiner les calculs de Catherine.

Louise
Je suis très impressionnée par ce que vous avez fait. C'est vraiment du beau travail!

Jérémie
Est-ce que tout est correct? La découverte et les calculs pour le prouver?

Louise
Eh oui!

Catherine
Je dois avouer que je suis soulagée, car Jérémie m'avait fait douter un peu : je n'étais pas absolument certaine de ne pas m'être trompée dans mes calculs.

Louise
C'est peut-être signe que votre démarche n'est pas tout à fait terminée. En effet, les expériences de Jérémie sur l'ordinateur lui ont permis de découvrir le résultat, et d'acquérir une certaine confiance quant à son exactitude. Puis, les calculs de Catherine ont amené la certitude que ce résultat était toujours vérifié. Mais le phénomène n'est pas encore totalement compris. Il faut donc continuer l'exploration.

Catherine
Mais comment procéder?

Louise
Comme c'est souvent le cas en mathématiques, il peut s'avérer utile de regarder la situation d'un autre point de vue, d'adopter un regard neuf.

Jérémie
Mais comment savoir quel point de vue choisir?

Louise
Il n'y a pas de recette magique pour faire des mathématiques, pas plus que pour écrire des romans ou composer de la musique. Comme on le dit parfois, il faut un peu d'inspiration et beaucoup de transpiration!

Catherine
Et, dans notre cas, ça voudrait dire quoi?

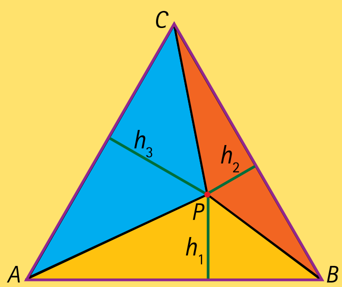
Louise
Vous pourriez essayer de trouver votre propre façon de voir les choses. Mais, comme vous manquez encore d'expérience, et pour vous donner un exemple de « regard neuf », je vais vous donner un coup de pouce. Dans votre situation, une façon alternative de voir les choses est de constater que le point intérieur P peut servir à diviser le triangle en trois triangles plus petits, et que l'aire du grand triangle est égale à la somme des aires des trois petits triangles.

Jérémie
Notre découverte parle de longueurs et nous passons aux aires! Il me semble que ça complique les choses...

Catherine
Mais tu oublies que l'aire d'un triangle peut se calculer en utilisant les longueurs :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Jérémie trace la figure suivante, puis semble frappé par une inspiration.

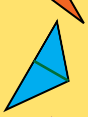


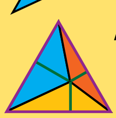
Jérémie
Regardez, les hauteurs sont en fait les distances du point P aux côtés du triangle.

Catherine
Faisons les calculs en représentant par c la longueur des côtés du triangle ABC. :


Aire du triangle PAB : $\frac{ch_1}{2}$


Aire du triangle PBC : $\frac{ch_2}{2}$

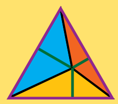

Aire du triangle PAC : $\frac{ch_3}{2}$


Aire du triangle ABC :

$$\frac{ch_1}{2} + \frac{ch_2}{2} + \frac{ch_3}{2}$$

Jérémie
Mettons $c/2$ en évidence !

Catherine
(poursuivant les calculs)


Aire du triangle ABC :

$$A_{ABC} = \frac{ch_1}{2} + \frac{ch_2}{2} + \frac{ch_3}{2} = \frac{c}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$$

Jérémie
On a donc que la somme des distances de P aux côtés du triangle ABC est égale à l'aire du triangle divisée par la demi-longueur du côté.

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{A_{ABC}}{\frac{c}{2}}$$

On voit que la somme des distances est égale à une expression qui ne dépend pas de la position du point P. Elle est donc constante !

Catherine
C'est beaucoup plus simple comme ça! En faisant mes calculs, j'ai l'impression que je me suis compliqué la vie pour rien. Tandis que là, je sens que je comprends vraiment !

Jérémie
Et maintenant, Louise, peut-on dire que notre exploration est terminée?

Louise
Vous êtes arrivés à une conclusion très satisfaisante, et vous pourriez arrêter là. Mais, comme toujours, une question résolue peut être le point de départ de plusieurs autres explorations :

- Qu'arrive-t-il si le triangle de départ n'est pas équilatéral?
- Est-ce que le même phénomène reste vrai pour un carré? Un pentagone régulier? Etc.

Catherine
J'aimerais aussi trouver le lien entre la somme des distances que nous venons de trouver et celle que j'avais calculée.

Jérémie
Et l'aventure continue...