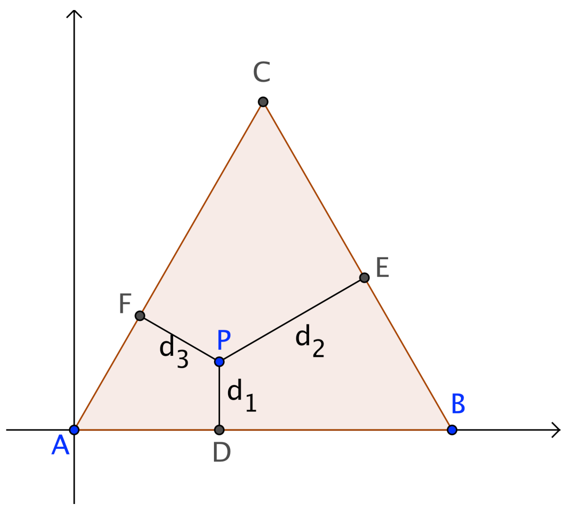
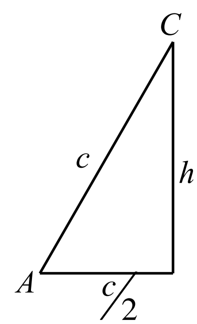
Choisissons tout d'abord un système d'axes qui va simplifier nos calculs : l'origine coïncidera avec le sommet A du triangle, tandis que le côté AB reposera sur l'axe des x positifs, comme illustré ci-dessous.



Dans ces conditions, les coordonnées des sommets A, B, C seront les suivantes :



- $A = (0,0)$
- $B = (c,0)$, où c est la longueur des côtés du triangle
- $C = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$,

  par application du théorème de Pythagore pour trouver h (voir ci-contre).

De plus, si on suppose que le point P est à l'intérieur du triangle ABC et que ses coordonnées sont (a,b), alors on aura :

- $P = (a,b)$
- $D = (a,0)$
- $d_1 = b$, où on sait que $b > 0$ car P est à l'intérieur du triangle.

Rappelons maintenant certains énoncés mathématiques connus ou facilement vérifiables :

- Si m est la pente d'une droite passant par (x_1,y_1) et (x_2,y_2), alors on a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- L'équation d'une droite de pente m et passant par (x_1,y_1) est $y = m(x - x_1) + y_1$.
- Si deux droites de pentes m_1 et m_2 sont perpendiculaires, alors $m_1 \times m_2 = -1$.

Pour calculer la longueur d_2, on va trouver le point d'intersection E de

- la droite passant par B et C, dont la pente est $\dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{c}{2}-c}=-\sqrt{3}$ et l'équation $y=-\sqrt{3}(x-c)$
- la droite passant par P et perpendiculaire à la droite BC, de pente $-\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  et d'équation $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-a)+b$
- on trouve les coordonnées du point $E = (u,v)$ comme intersection des deux droites précédentes

$$-\sqrt{3}(u-c)=\frac{\sqrt{3}}{3}(u-a)+b$$
$$-3(u-c)=(u-a)+\sqrt{3}b \qquad \left[\text{On a multiplié par } \sqrt{3}\right]$$
$$0=(u-a)+\sqrt{3}b+3(u-c)$$
$$=4u-a+\sqrt{3}b-3c$$
$$a-\sqrt{3}b+3c=4u$$
$$\frac{1}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{4}b+\frac{3}{4}c=u$$
$$u=\frac{1}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{4}b+\frac{3}{4}c$$
$$v=-\sqrt{3}(u-c)$$
$$=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{4}b+\frac{3}{4}c-c\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a-\sqrt{3}b-c\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{4}b+\frac{\sqrt{3}}{4}c$$

- on a donc

$$E=(u,v)=\left(\frac{1}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{4}b+\frac{3}{4}c,-\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{4}b+\frac{\sqrt{3}}{4}c\right)$$

- on peut alors calculer la distance d_2 entre P et E comme suit :

$$d_2 = dist(P,E) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a - \tfrac{\sqrt{3}}{4}b + \tfrac{3}{4}c - a\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{4}a + \tfrac{3}{4}b + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c - b\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\tfrac{3}{4}a - \tfrac{\sqrt{3}}{4}b + \tfrac{3}{4}c\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{4}a - \tfrac{1}{4}b + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(-3a - \sqrt{3}b + 3c\right)^2 + \left(-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{3}\left[-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right]\right)^2 + \left(-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+1)\left(-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|-\sqrt{3}a - b + \sqrt{3}c\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}c - \sqrt{3}a - b\right)$$

Remarque importante : la dernière égalité découle du fait que, puisque le point P est à l'intérieur du triangle ABC, il est *sous* la droite passant par B et C, et on a donc (via l'équation de cette droite) $b < -\sqrt{3}(a-c)$, ce qui revient à $0 < \sqrt{3}c - \sqrt{3}a - b$.

Pour calculer la longueur d_3, on va trouver le point d'intersection F de

- la droite passant par A et C, dont la pente est $\dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{c}{2} - 0} = \sqrt{3}$ et l'équation $y = \sqrt{3}x$
- la droite passant par P et perpendiculaire à la droite AC, de pente $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  et d'équation $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-a) + b$
- on trouve les coordonnées du point $F = (r,s)$ comme intersection des deux droites précédentes

$$\sqrt{3}s = -\frac{\sqrt{3}}{3}(s-a) + b$$

$$3s = -(s-a) + \sqrt{3}b \quad \left[\text{En multipliant par } \sqrt{3}\right]$$

$$4s = a + \sqrt{3}b$$

$$s = \frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

$$t = \sqrt{3}s = \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{3}{4}b$$

- on a donc

$$F=(s,t)=\left(\frac{1}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{4}b,\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{4}b\right)$$

- on peut alors calculer la distance h_2 entre P et E comme suit :

$$\begin{aligned}
d_3=dist(P,F)&=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{4}b-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{4}b-b\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{4}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a-\frac{1}{4}b\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{\left(-3a+\sqrt{3}b\right)^2+\left(\sqrt{3}a-b\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{\left(-\sqrt{3}\left[\sqrt{3}a-b\right]\right)^2+\left(\sqrt{3}a-b\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{(3+1)\left(\sqrt{3}a-b\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}a-b\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}a-b\right|\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}a-b\right)
\end{aligned}$$

Remarque importante : la dernière égalité découle du fait que, puisque le point P est à l'intérieur du triangle ABC, il est *sous* la droite passant par A et C, et on a donc (via l'équation de cette droite) $b<\sqrt{3}a$, ce qui revient à $0<\sqrt{3}a-b$

On peut maintenant calculer la somme des distances :

$$d_1+d_2+d_3=b+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}c-\sqrt{3}a-b\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}a-b\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}c\ .$$

Tout un calcul!
Et c'était pour un triangle équilatéral!
Imaginez pour un pentagone régulier!