
Lagrange et le jeune Fourier (1787-1798)

Louis CHARBONNEAU

1. Introduction

Vouloir parler de l'influence de Joseph Louis Lagrange sur un jeune mathématicien du début du XIX^e siècle relève presque d'une tautologie tant celui-là a imbibé la pensée mathématique de son temps. Ceci est particulièrement vrai dans le cas du jeune Fourier. Aussi, trouvera-t-on ici non pas une analyse conceptuelle mais plus modestement quelques indications factuelles. Nous nous sommes restreint à la période de formation de Fourier et plus particulièrement à l'époque où il entre pour la première fois en contact avec le milieu scientifique français, depuis son arrivée à Paris au début de 1795 comme étudiant à l'Ecole Normale, jusqu'à son départ pour l'Egypte au printemps 1798.

Fourier subit l'influence de Lagrange, qu'on pourrait qualifier de nécessaire, dans divers domaines: la résolution numérique des équations, la statique, la théorie de la propagation de la chaleur, auxquels on pourrait peut-être ajouter la théorie des probabilités. Ces trois domaines d'activités de Fourier ne sont pas indépendants les uns des autres. Bien au contraire. La résolution des équations aux dérivées partielles, avec conditions limites et conditions aux bornes, issues de l'étude du mouvement de la chaleur dans une sphère ou dans un cylindre, oblige à prendre en compte la nature réelle ou imaginaire des racines de certaines équations transcendantes. Ce sera là d'ailleurs la source d'une controverse avec Poisson. De même son travail sur les fondements de la statique et le principe des vitesses virtuelles révèle déjà un type d'approche de mathématisation des phénomènes physiques similaire à ce qu'on retrouve dans ses travaux sur la propagation de la chaleur.

2. Les mémoires d'analyse algébrique de 1787 et 1789

Les premiers travaux originaux de Fourier en mathématiques portent sur la résolution numérique des équations. Un premier mémoire écrit

en 1787 fut envoyé à Montucla l'année suivante¹. Toutefois, Montucla ne répondit pas à l'envoi de Fourier qui s'en trouva fort mortifié². Néanmoins, le 9 décembre 1789, Fourier lut devant l'Académie de sciences de Paris un mémoire sur la résolution des équations algébriques. Celui-ci reprenait essentiellement le mémoire de 1787, mais tout de même avec quelques ajouts. Cousin, Monge et Legendre furent désignés pour faire rapport. Au dire de Fourier, leur rapport, signé des deux premiers, se montrait encourageant³.

Que contenait ce mémoire? On y trouve une première généralisation de la règle de Descartes permettant de déterminer le nombre de racines dans un intervalle par l'examen des variations des signes. Fourier y manifeste aussi un souci d'étendre aux équations littérales (c'est-à-dire les polynômes à plusieurs variables), comme le faisait déjà Newton, ses considérations sur la détermination des racines des équations algébriques. Dans ce cadre, il présente la forme analytique du parallélogramme de Newton donnée par Lagrange dans son mémoire de 1779 «Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral»⁴. On y trouve aussi un exposé de la méthode de Lagrange utilisant l'équation des carrés des différences des racines.

Donc, dès 1787, et malgré qu'il ait affirmé plus tard ne pas avoir connu au début de ses recherches ce qui avait été fait auparavant⁵, Fourier, alors âgé de 19 ans, fait preuve d'une bonne culture mathématique dans ce domaine tout au moins et démontre une connaissance précise d'une partie de l'oeuvre de Lagrange. D'ailleurs, en mai 1788, dans une lettre à son ami Bonnard, il mentionne «M. de la Grange» manifestement avec estime⁶.

¹ Voir à la Bibliothèque Nationale à Paris, cabinet des manuscrits (B.N.), fond français (f.fr.) 22510, 29v° pour des informations données par Fourier sur l'histoire de ce mémoire. Il ne nous reste du mémoire que les quatre dernières pages (B.N. f.fr. 22511, 76r° v°-77r° v°). Heureusement, une analyse synthétique en est faite par Navier dans l'«Avertissement de l'éditeur» qu'il a ajouté à l'*Analyse des équations déterminées* de Fourier (1831).

² Fourier croit que Montucla a toutefois conservé ce mémoire dans ses papiers jusqu'à sa mort (B.N. f.fr. 22510, 29v°).

³ Herivel, J., 1975, *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*, Oxford, p. 252, note 6.

⁴ *Nouv. Mém. Berlin, année 1776* (Berlin 1779) pp. 236-264 (*Oeuvres*, IV, p. 301-332).

⁵ B.N. f.fr. 22510, 29 v°.

⁶ Herivel, J., 1975, opus cit., p. 244, Lettre I.

3. A Paris, 1795-1796

3.1. A l'École Normale

A l'automne 1794, alors que Fourier est professeur de cosmographie et de statique au Collège d'Auxerre et a la charge d'une classe préparatoire pour le concours d'entrée à l'École Polytechnique⁷, l'atmosphère politique devient de plus en plus malsain pour lui. Heureusement, il est nommé étudiant à l'École Normale, suite à l'intervention de Garnier alors à Auxerre comme examinateur d'entrée pour l'École centrale des travaux publics⁸. Parvenu à Paris pour le début des cours le 20 janvier 1795, il est bientôt remarqué à la fois par Monge, Laplace et Lagrange. La discussion dans le cours de Monge sur la définition de la ligne droite est bien connue⁹. Par ailleurs, les relations entre Fourier d'une part, Lagrange et Laplace d'autre part, nous sont mal connues. L'estime de Fourier pour Lagrange se manifeste clairement dans son commentaire à Bonnard en février 1795 sur les professeurs de l'École, Lagrange y est vu comme un grand homme et le premier parmi les savants d'Europe¹⁰. Laplace pour sa part a droit à plus de retenue. Ce dernier, au cours de la 14^{ème} séance, le premier ventôse, «exhorte ceux qui veulent approfondir ces matières, à se réunir de tems en tems, pour cet objet (c'est-à-dire la résolution des équations algébriques, entre autres la distinction des racines et la factorisation). Je me ferai un devoir d'assister, le plus souvent qu'il me sera possible, à ces conférences». Il n'est pas douteux que Fourier ait participé à de tels groupes s'ils ont existé, d'autant plus que dans ce même cours Laplace affirme «On n'a point encore de règle générale pour reconnaître dans une équation proposée, le nombre de racines réelles, et celui des racines imaginaires», sujet qui lui tenait à coeur¹¹. Par ailleurs, le poste de maître de conférence que Fourier occupa à l'École¹² le mit nécessairement en contact avec ces deux éminents

⁷ Cestre, M., 1911, Le collège d'Auxerre, de 1790 à 1796, *Bulletin de la Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne pour l'année 1910*, pp. 158-159.

⁸ Selon le témoignage de J.G. Garnier cité dans Quetelet, A., 1866, *Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIX^e siècle*, Bruxelles, p. 210.

⁹ *Séances des Ecoles Normales, recueillis par des sténographes et revues par les professeurs*, Nouvelle édition, Débats, t.1 an IV, 1801, pp. 28 à 31 et 148-149.

¹⁰ Herivel, J., 1975, opus cit., p. 259-260.

¹¹ *Séances des Ecoles Normales, recueillis par des sténographes et revues par les professeurs*, Première partie, Leçons, t. 1, Paris an IV, les deux citations se trouvent pages 122 et 127.

¹² Herivel, J., 1975, opus cit., p. 278, note 7.

professeurs. C'est peut-être lors d'une telle rencontre qu'il leur présenta sa preuve de la règle de Descartes, et qu'il reçut la promesse, non tenue, d'être publié¹³.

3.2. *L'École polytechnique: les premiers cours*

Le passage à l'École Normale réorienta la carrière du jeune mathématicien en le faisant connaître et apprécier des savants de Paris. Ainsi, le 9 mai 1795, Monge le présente au Conseil de l'École centrale des travaux publics. Il est plausible qu'il désirait voir Fourier l'assister dans ses cours. Mais par suite des problèmes politiques qui forcèrent Monge à s'éloigner et entraînèrent l'arrestation de Fourier, ce dernier ne se voit attribué une tâche que le 28 novembre suivant, en l'occurrence un cours d'analyse algébrique destiné à toutes les divisions¹⁴. En janvier, il prend en plus à sa charge une partie du cours d'analyse de Prony, en particulier la partie de calcul différentiel et intégral, comprenant une section sur le calcul des variations¹⁵. Il donna aussi, à partir du mois de mai un cours de calcul différentiel et intégral aux étudiants de la première division¹⁶. Quelle influence Lagrange a-t-il eu sur la planification de ces cours?

Cours d'analyse algébrique.

Ce cours créé sans aucun doute en vue de combler les lacunes qui se manifestèrent très tôt chez les étudiants lors des cours révolutionnaires et même des premiers cours réguliers, se divise en trois grandes parties (suivant la division de Fourier lui-même): A) Principes (qui traitent des théorèmes importants concernant les équations algébriques et littérales, et quelques notions sur les suites); B) Objets divers (fractions continues,

¹³ Ibid., p. 272, lettre VIII.

¹⁴ Langins, J., 1981, Une lettre inédite de Fourier sur l'enseignement destiné aux ingénieurs en 1797, *Rev. d'hist. sc. et appl.*, XXXIV, p. 199 et Langings, J., 1987, *La République avait besoin de savants*, Paris, pp. 81 et 84.

¹⁵ Phili, C., 1976, Les débuts de l'enseignement de l'analyse à l'École Polytechnique, *Comptes rendus du 100^e congrès national des Sociétés savantes (Paris 1975)*, p. 97, n. 17. La correspondance des dates permet une identification précise de ces cours dans les manuscrits mentionnés à la note suivante.

¹⁶ Ces cours nous sont parvenus et sont conservés en deux copies semblables mais non identiques à la Bibliothèque de l'École Nationale des Ponts et Chaussées et à la Bibliothèque de l'Institut. Pour une analyse de ces cours, voir Charbonneau, L., 1976, *L'oeuvre mathématique de Joseph Fourier*, thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, E.H.E.S.S., Paris, pp. 11 à 22.

logarithmes, suites récurrentes), C) Théorie des équations, qui se divise en trois parties: 1^e Théorèmes (Harriot, Descartes, fonctions symétriques, etc.), 2^e Résolution (équations algébriques, littérales, approximations, fonctions symétriques, etc.), 3^e Elimination.

Comme il était d'usage alors, et contrairement à l'usage actuel, le professeur enrichissait son cours de nombreuses références aux textes originaux donnant ainsi un bref aperçu de l'histoire du sujet traité. Dans la liste des références ainsi données aux étudiants, Lagrange n'apparaît curieusement qu'une seule fois, pour la description analytique du parallélogramme de Newton. Toutefois, tout en privilégiant déjà une approche plus numérique que celle de Lagrange, Fourier fait part à ses élèves des résultats des travaux de Lagrange, mais sans le nommer explicitement.

Les cours de calcul différentiel et intégral.

Le cours que Fourier donne à la deuxième division repose essentiellement sur les idées de Lagrange. Toutefois, le traitement qui en est fait ressemble davantage à la présentation de Lacroix dans son *Traité du calcul différentiel et intégral* qu'à celle de Lagrange dans son *Théorie des fonctions analytiques*... Doit-on parler ici de l'influence de Lacroix ou de celle de Lagrange? Chose certaine, malgré le fait que Fourier donne ce cours en parallèle avec le cours de mécanique de Prony, il opte pour une approche tout à fait différente de celle choisie par Prony dans le cours de calcul différentiel et intégral donné de mars à octobre 1795¹⁷. L'estime de Fourier pour l'approche lagrangienne se manifeste par ailleurs clairement lorsqu'il dit dans son cours du 11 pluviôse que la méthode de Lagrange est «la seule qui ne laisse rien à désirer». Signalons de plus que la partie du cours sur le calcul des variations reprend explicitement tous les célèbres résultats de Lagrange.

Dans le cours aux étudiants de la première division, donc à des étudiants qui ont peu ou pas d'antécédants en calcul, il se montre plus prudent ou circonspect en affirmant dès le premier cours (4 prairial) que le calcul ne peut être rigoureusement défini. Cette affirmation surprend, venant quelques mois après l'acte de foi du 11 pluviôse. Elle découle peut-être simplement d'un souci pédagogique d'aborder géométriquement le calcul, ce qui serait, selon monsieur Pepe, conforme aux vues pédagogiques de Lagrange.

¹⁷ De Prony, G.R., 1794-1796, Cours d'analyse appliquée à la mécanique, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 1, pp. 92 à 119, cahier 2, pp. 1 à 23, cahier 3, pp. 209 à 278, cahier 4, pp. 450 à 569.

4. Paris 1796-1798: Les recherches sur la statique

4.1. *Le contexte*

Le mémoire de Fourier sur la statique est bien connu pour les démonstrations du principe des vitesses virtuelles qu'il contient¹⁸. Il faisait en fait parti d'une trilogie sur ce sujet comprenant le mémoire de Fourier, celui de Lagrange et un autre par de Prony¹⁹. Comme le dit monsieur Costabel, cette floraison de mémoire souligne le contexte d'«intense activité qui anime, dès le premières années, les maîtres et répétiteurs de l'École Polytechnique pour constituer la Mécanique comme science rationnelle et monnayer, au service de la formation des futurs ingénieurs, le contenu de la *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788)»²⁰. La première référence à ces discussions vient de Prony. Dans la dernière leçon de son cours d'analyse appliquée à la mécanique, cours qui devrait être le cours qu'il donna à l'École Polytechnique de mars à octobre 1795 mais dont cette trentième et dernière leçon ne fut publiée qu'en octobre 1797²¹, Prony y souligne un «développement instructif» de Fourier à propos du critère de minimalité d'une fonction algébrique à plusieurs variables, critère donné par Lagrange dans sa *Mécanique analytique* (Livre I, section III).

Le mémoire de Fourier ne porte pas uniquement sur le principe des vitesses virtuelles. Il contient un certain nombre de considérations (section IV) sur la stabilité d'un système et plus particulièrement sur les vibrations d'un tel système près du point d'équilibre. C'est dans ce cadre que Fourier fait lui-même allusion aux réflexions mentionnées par Prony. Il est assez remarquable de constater que Lagrange dans la deuxième édition de sa *Mécanique analytique* apporte, parmi d'autres modifications, des compléments sur les thèmes abordés par Fourier, à savoir la preuve du principe des vitesses virtuelles (Livre I), une discussion sur les propriétés de l'équilibre, relatives aux maxima et minima (Livre I, section III), et une étude sur les oscillations très petites des corps

¹⁸ Fourier, J., 1798, Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principes des vitesses virtuelles, et la théorie des moments, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 5, pp. 20 à 60, *Oeuvres*, II, pp. 475 à 521.

¹⁹ Lagrange, J. L., 1798, Sur le principe des vitesses virtuelles, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 5, pp. 115 à 118, *Oeuvres*, VII, pp. 317 à 321, de Prony, G.R., 1798. Sur le principe des vitesses virtuelles et la décomposition des mouvements circulaires, *Ibid.*, pp. 191 à 208.

²⁰ Costabel, P., 1972, Fourier et le Principe des vitesses virtuelles, *Sciences*, t. III, n. 4, p. 295.

²¹ Voir la note 17.

(Livre II, section VI). Ces deux dernières questions rejoignent les intérêts antérieurs de Fourier par le fait de leurs relations avec la théorie des équations et plus particulièrement la distinction de la nature réelle ou imaginaire des racines²².

On perçoit, par ces quelques recoupements, l'intensité des échanges qui eurent alors lieu à l'École polytechnique. Si Lagrange semble avoir profité de ceux-ci, puisqu'il a modifié en conséquence son célèbre traité, que dire de Fourier?

4.2. *La mécanique: un premier pas vers la physique mathématique.*

La publication du mémoire de 1798 marque pour Fourier non seulement une première en ce qu'elle constitue sa première publication, mais aussi en ce qu'elle indique une première percée vers la mathématisation des phénomènes physiques. Dans ce sens, ce mémoire occupe une place importante d'autant plus qu'on y retrouve déjà des réflexions qui referont surface dans ses célèbres mémoires sur la propagation de la chaleur. Ainsi, son positivisme dans l'approche à suivre s'y manifeste déjà: «L'ignorance où nous sommes de la constitution intérieure de la matière ne permet guère de juger clairement de cette action réciproque des ponts physiques, qui conserve les distances et protège en quelque sorte, contre toute action étrangère, la forme particulière du composé» (§ 16), d'où résulte pour lui l'obligation de passer par des modèles purement mécaniques comme celui des leviers ou celui des pendules²³. De même, lorsque Fourier étudie les oscillations d'un système dans le voisinage de l'équilibre, il dit que «les petites oscillations des corps se composent d'oscillations simples qui s'accomplissent en même temps sans se nuire» (§ 30). Ce thème de l'indépendance des mouvements revient dans la théorie de la chaleur lorsqu'après avoir obtenu une solution générale sous forme d'une série trigonométrique, il considère chaque terme de la série comme l'expression d'un mouvement autonome, indépendant des autres²⁴. Ne dit-il pas, «... les circonstances du mouvement déter-

²² De Prony, G.R., 1794-1796, cahier 4, p. 567. Lagrange, J.L., *Mécanique Analytique*, seconde édition, Tome I, Livre II, section VI, paragraphes 7 et 8.

²³ Lagrange, dans la deuxième édition de 1811, mentionne aussi le modèle des pendules. (Livre II, section VI, paragraphes 4 et 11).

²⁴ Fourier considérait l'indépendance des mouvements de la chaleur comme un acquis important de sa théorie. Ainsi, dans un article de vulgarisation comme le «Mémoire sur les températures du globe terrestre» (*Mém. Ac. Roy. Sc.*, t. VII, 1827, pp. 570 à 604, *Oeuvres*, t. II, pp. 92 à 125), il revient à plusieurs reprises là-dessus (*Oeuvres*, t. II, pp. 102 et 122-123) en relation avec la dynamique.

miné par ces procédés (modèle du mouvement simultané des plusieurs pendules) n'ont jamais lieu, quelque voisin que le corps soit de l'équilibre: elles conviennent à ce mouvement régulier dont les agitations du corps approcheront d'autant plus que les impulsions primitives seront plus petites, Ainsi la figure représentée par les résultats du calcul n'a qu'une existence abstraite et ne peut jamais être celle du corps qui oscille. Cette remarque donne la solution des difficultés qu'on a proposées sur la figure des cordes vibrante» (§ 38). Cette réflexion doit être rapprochée de la conception mongienne, que nous retrouvons ultérieurement chez Fourier, d'une courbe représentée par une série infinie comme une enveloppe des sommes partielles²⁵. Elle donne l'impression qu'avant même de rencontrer le problème, Fourier avait résolu la question de la représentabilité d'une fonction arbitraire par une série infinie.

5. Conclusion

Fourier aurait reproché à Abel et Jacobi le purisme de leurs préoccupations mathématiques²⁶. Il fait peu de doute qu'il ait pensé de même des travaux de Lagrange sur la résolution des équations. Par contre, ce sentiment ne saurait impliquer les travaux de mécanique. Nous avons voulu dans cette note souligner que vouloir chercher une influence de Lagrange sur Fourier oblige à dépasser le cadre de la résolution numérique des équations et à passer par ce point de contact ponctuel qu'en apparence que fut la mécanique. Aussi faut-il souhaiter qu'une étude des travaux inédits²⁷ de Fourier en mécanique soit bientôt entreprise.

Louis CHARBONNEAU - Département de mathématiques et d'informatique,
Université du Québec à Montréal, C.P. 8888, Succ. A, Montréal, Qc, H3C 3P8 -
CANADA.

²⁵ Dahan, A., 1982, J. Fourier: L'élaboration de la théorie analytique de la chaleur, *Sciences et techniques en perspective*, année 1981-1982, vol. 1, Université de Nantes, p. 7.1 à 7.41, voir la section 3c.

²⁶ Merz, J.T., 1904-1912, *A History of European Scientific Thought in the Nineteenth Century*, Londres, réimp. Dover, 1965, vol. 2, p. 657, n. 1.

²⁷ B.N. f.fr. 22520. Tout ce volume de manuscrits est consacré à la mécanique.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM TAURINENSIS

Colloque

**LA «MÉCANIQUE ANALYTIQUE»
DE LAGRANGE ET
SON HÉRITAGE**

I

Fondation Hugot du Collège de France

Paris, 27-29 Septembre 1988



Supplemento al numero 124 (1990) degli
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO - 1990

TABLE DES MATIÈRES

RENÈ TATON, <i>Lagrange et l'Académie Royale des Science (1763-1793)</i>	1-23
MARIA TERESA BORGATO, LUIGI PEPE, <i>L'inventaire des manuscrits de Lagrange et la mécanique avec l'édition du manuscrit de Lagrange: «Differentes notes sur les ouvrages de mecanique»</i>	25-49
PATRICE BAILHACHE, <i>Quels fondements pour la Mécanique analytique?</i>	51-70
PIERRE COSTABEL, <i>Lagrange et l'art analytique</i>	71-80
AMY DAHAN DALMEDICO, <i>Le formalisme variationnel dans les travaux de Lagrange</i>	81-106
LOUIS CHARBONNEAU, <i>Lagrange et le jeune Fourier (1787-1798)</i>	107-114
CHRISTINE PHILI, <i>Lagrange et Condorcet</i>	115-118
SERGIO BENENTI, <i>L'intégration de l'équation d'Hamilton-Jacobi par séparation des variables: histoire et résultats récents</i>	119-144
PIERRE DAZORD, <i>Autour du mouvement de Lagrange</i>	145-158
I. EKELAND, <i>Les solutions périodiques en mécanique analytique</i>	159-167
N.J. HITCHIN, <i>Hypersymplectic quotients</i>	169-180
FRANCO MAGRI, <i>Geometry and soliton equations</i>	181-209
CHARLES-MICHEL MARLE, <i>Variables actions-angles: leur détermination et leurs singularités</i>	211-243
JERROLD E. MARSDEN and JUAN C. SIMO, <i>The Energy-Momentum Method</i>	245-268
JEAN-MARIE SOURIAU, <i>Des principes géométriques pour la mécanique quantique</i>	269-306
PIERRE VAN MOERBEKE, <i>La géométrie des système intégrables</i>	307-349