Des mathématiques qui mènent loin

Actes du 44^{e} congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec

Association Mathématique Du Québec

les éditions Le Griffon d'argile

les éditions
Le Griffon d'argile

7649, boulevard Wilfrid-Hamel
Sainte-Foy (Québec) G2G 1C3
(418) 871-6898 • 1 800 268-6898
Télécopieur: (418) 871-6818
www.griffondargile.com
admin@griffondargile.com

Des mathématiques qui mènent loin.
Actes du 44e congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec
ISBN 2-89443-192-9

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition (PADIE) pour nos activités d'édition.

Gouvernement du Québec - Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres - Gestion SODEC

Dépôt légal
Bibliothèque nationale du Canada
Bibliothèque nationale du Québec
4e trimestre 2002

Imprimé au Québec, Canada

LA TRIGONOMÉTRIE : UNE HISTOIRE À L'ENVERS TOURNÉE D'ABORD VERS LE CIEL

Louis Charbonneau
Département de mathématiques
UQAM

1. INTRODUCTION

Une certaine confusion règne quant au sens à donner au mot *trigonométrie.* Si l'on considère son étymologie, trigonométrie signifie « mesure des triangles ». Par contre, à l'école secondaire, le terme trigonométrie réfère plutôt à la trigonométrie des triangles rectangles, dans laquelle les grandeurs trigonométriques, comme le sinus et le cosinus, sont définies en tant que rapports de certains côtés d'un triangle rectangle. Le terme prend un sens différent lorsque les grandeurs trigonométriques sont plutôt définies en termes soit de mesure orientée de certains segments, soit des coordonnées d'un point du cercle trigonométrique. Enfin, intimement reliée à cette dernière acception, la trigonométrie des fonctions trigonométriques s'ajoute aux trois premiers sens.

L'enseignement de la trigonométrie au secondaire s'articule autour d'une progression que l'on pourrait résumer de la façon suivante :

- Étude de la similitude des triangles.
- Trigonométrie des triangles rectangles.
  Dans cette trigonométrie, le sinus est un rapport et les angles sont mesurés en degrés.
- Trigonométrie du cercle.
  Le sinus est une des coordonnées d'un point du cercle trigonométrique, ou encore la mesure orientée d'un segment (segment correspondant à la hauteur du point par rapport à l'axe des x). À cela vient se greffer l'étude des fonctions trigonométriques. Un nouveau système de mesure des angles, les radians, est alors introduit habituellement avant même de véritablement introduire cette nouvelle trigonométrie.

Les enseignants connaissent bien les difficultés que cette progression engendre chez les élèves. L'extension du sens du mot sinus lorsque l'on passe de la trigonométrie du triangle rectangle à la trigonométrie du cercle provoque aussi des résistances. Les élèves ne voient pas comment on peut parler du sinus de 0° ou de 90° puisque dans un triangle rectangle on ne peut avoir un angle de 0°ou deux angles de 90°.

Comment un sinus peut-il être négatif puisqu'il est un rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle ? À cela s'ajoute l'introduction d'une nouvelle unité de mesure, le radian. Cette unité de mesure demeure étrangère, ne réussissant pas à déloger les degrés. À preuve, à chaque fois que je demande à un groupe d'étudiants universitaires (en formation des enseignants ou en mathématiques) de me montrer un angle d'un radian en formant un angle avec leurs mains, il n'est pas rare que personne ne puisse me répondre.

Devant ces difficultés, il m'apparaît intéressant de remarquer que la **progression imposée aux élèves ne correspond pas à l'évolution historique de la trigonométrie**. Non pas que l'évolution historique doive être reprise dans l'enseignement. Bien au contraire, cela serait souvent complètement anti-pédagogique, comme ce serait le cas par exemple pour l'enseignement de l'algèbre linéaire ou même, à bien des égards, de l'algèbre. Mais pour certains domaines, l'histoire nous donne matière à réflexion. La trigonométrie me semble l'un de ceux-ci. Voici cinq constatations historiques qui me porte à penser ainsi :

1. Le sinus, en tant que notion fonctionnelle[1], a précédé de deux milles ans le sinus en tant que rapport.
2. L'inverse fonctionnel du sinus, ce que nous appelons l'arc sinus, a été utilisé dès que le sinus est devenu un outil de calcul.
3. La trigonométrie a d'abord été, dans le temps, une partie de l'astronomie, et non un sujet mathématique autonome, et ce essentiellement jusqu'à la Renaissance.
4. Les difficultés rencontrées dans l'écriture et la manipulation des fractions ont influencé les choix des unités de mesure des angles et des longueurs à utiliser.
5. Les radians ont été inventés plutôt récemment, soit en 1873.

Voyons cela de plus près.

2. LE SINUS, COMME NOTION FONCTIONNELLE, PRÉCÈDE LE SINUS COMME RAPPORT.

(Nous développons, dans cette section, les constatations historiques 1, 2 et 3)

Le développement par les Grecs de l'Antiquité d'un modèle géométrique du mouvement des astres célestes basé sur le cercle et la sphère a obligé les astronomes à développer des outils leur permettant de résoudre les nombreux problèmes découlant des ajustements à faire pour que le modèle soit conforme d'assez près aux observations. C'est dans ce contexte que l'astronome Hipparque (190-120 av. notre ère) a calculé, pour la première fois à notre connaissance, une table de l'ancêtre du sinus.[2] Cet ancêtre est la mesure de la corde d'un arc de cercle. Nous noterons crd(α) pour la mesure de la corde de l'arc. Dans la figure 1, crd(α) = AB.

[1] Même si le concept de fonction date formellement de l'époque de l'invention du calcul différentiel et intégral, à la fin du XVIIe siècle, on peut parler de notion fonctionnelle bien avant. Par notion fonctionnelle, j'entends un processus permettant de déterminer la valeur d'une grandeur en fonction d'une autre. Voir à ce sujet ma série de chroniques, Charbonneau, Louis, Fonction: Du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIe siècle, *Bulletin AMQ*, mai 1987, pp. 5 à 10; Fonction (II): Un personnage en quête d'auteur. Le XVIIIe siècle, octobre 1987, *Bulletin AMQ* , pp. 6 à 8; Fonction (III): En état de crise, sa personnalité se dévoile. Le début du XIXe siècle, *Bulletin AMQ*, décembre 1987, pp. 5 à 9.

[2] On attribue aussi à Hipparque la division du cercle en 360°. Voir à ce sujet Charbonneau, Louis, 24 heures... 360°. ... Pourquoi ?, *Bulletin AMQ*, octobre 1986, pp. 5-6.

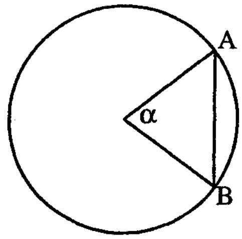


Figure 1
La corde d'un angle α

La relation avec notre sinus est facile à voir :
${}^{1}/_{2}\ \mathrm{crd}(\alpha) = R\sin(\alpha/2)$, où R est le rayon du cercle.

Ici, il faut comprendre que l'angle α est mesuré en degrés. Pour établir sa table, Hipparque considère un cercle de rayon 3438 unités de mesure de longueur[3] et utilise des identités permettant, connaissant un angle et la corde qui lui correspond, d'exprimer la corde du supplément de celui-ci et la corde du demi de cet angle. Il utilise même, mais seulement de façon implicite, ce que nous appelons les lois du sinus et du cosinus. Fort de ces outils de calcul, il donne une table des cordes pour les angles depuis $7\,{}^{1}/_{2}{}^{\circ}$ jusqu'à 180°, par sauts de $7\,{}^{1}/_{2}{}^{\circ}$.

Plus de deux cents ans après Hipparque, Ptolémée (100-178 de notre ère) raffinera la table des cordes, entre autres après avoir trouvé une formule permettant de déterminer la corde de la différence de deux arcs dont on connaît les cordes et en utilisant une approximation. Sa table, donnée pour un cercle de rayon de 60 unités de longueur, couvre les angles depuis ${}^{1}/_{2}{}^{\circ}$ jusqu'à 180°, par sauts de ${}^{1}/_{2}{}^{\circ}$. Un exemple[4], qu'un lecteur pressé pourra sauter, nous permettra de saisir l'utilisation qu'a fait Ptolémée de sa table des cordes. Il nous permettra de voir la corde sous son aspect fonctionnel, entre autres par l'utilisation des proportions et de tableaux de valeurs comme de outils de calcul dans un modèle.

2.1 Un modèle du mouvement apparent du Soleil sur la sphère des étoiles

Depuis la nuit des temps, on a remarqué que le Soleil se déplace en un mouvement annuel par rapport aux étoiles. Dans le modèle de Ptolémée, le trajet du Soleil forme un grand cercle sur la sphère des étoiles, cercle appelé écliptique. Par rapport à l'équateur de la sphère céleste, ce cercle fait un angle d'environ 23 degrés. Lorsque le Soleil se trouve à un point d'intersection de l'épicycle et de l'équateur, cela correspond aux équinoxes de printemps ou d'automne.

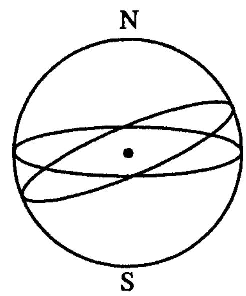


Figure 2
L'équateur céleste et l'écliptique

Lorsqu'il se trouve aux points les plus éloignés de l'équateur, cela correspond aux solstices d'été ou d'hiver. Selon ce modèle de base, il semblerait que le temps pris par le Soleil pour aller de l'équinoxe du printemps à l'équinoxe d'automne devrait être égal au temps pris pour aller de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe du printemps. Mais, en réalité, ce n'est pas le cas. Ainsi, le Soleil prend 187 jours pour aller de l'équinoxe du printemps à celui d'automne[5], dont 94

[3] Nous allons revenir plus loin sur ce choix du nombre d'unités pour le rayon du cercle.

[4] Cet exemple est inspiré de Katz, Victor J., *A History of Mathematics, An Introduction*, Addison-Wesley, 1998, p. 150-151. D'ailleurs, dans cet article, l'essentiel des informations historiques sur l'histoire de la trigonométrie proviennent de ce beau livre.

[5] Donc le Soleil prend $178\,{}^{1}/_{2}$ jours pour aller de l'équinoxe d'automne à celui du printemps.

$^1/_2$ jours pour aller jusqu'au solstice d'été et 92 $^1/_2$ autres jours pour, de là, atteindre l'équinoxe d'automne. Pour ajuster le modèle à ces données d'observation, Ptolémée aurait pu considérer que la vitesse angulaire variait au cours de l'année. Mais une telle hypothèse allait à l'encontre des convictions de l'époque voulant qu'un corps céleste, étant par nature parfait, ne pouvait se déplacer que sur une trajectoire circulaire à vitesse angulaire constante. L'un des artifices utilisés par Ptolémée fut de considérer que le Soleil se déplaçait sur un cercle décentré par rapport à la Terre, le centre de l'univers. C'est le cercle C_2 de centre D dans la figure 3. Les deux droites perpendiculaires passant pas T (la Terre) déterminent les équinoxes et les solstices. Puisque le cercle C_2 ne constitue qu'un modèle pour le déplacement apparent du Soleil sur la sphère des étoiles, son rayon peut être pris arbitrairement. Ptolémée le prend égal à 60.

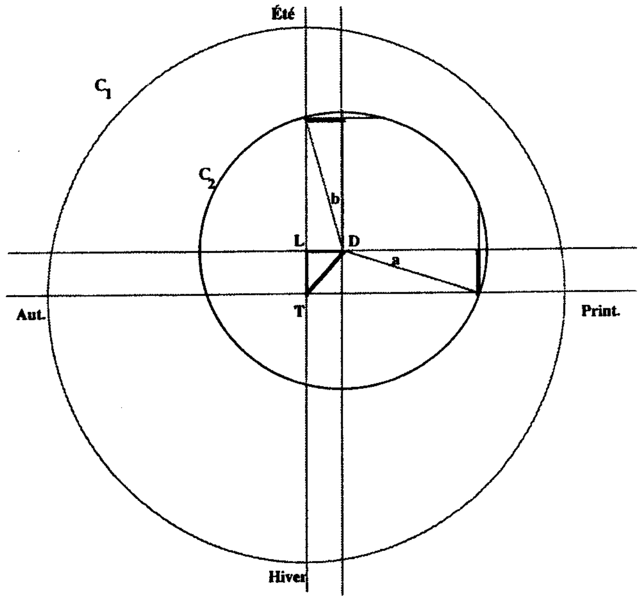


Figure 3

C_1 est le cercle sur la sphère des étoiles sur lequel le Soleil, en apparence, se déplace. Il correspond à l'écliptique.
C_2 est le cercle de centre D, de rayon 60, modèle du déplacement du Soleil.

Le problème de Ptolémée consiste à fixer la position de ce cercle « décentré », autrement dit de connaître les côtés et les angles du triangle rectangle TLD (figure 3).

Les données du problème sont :

- La vitesse angulaire constante v du Soleil sur le cercle C_2 est de :

  $$360°/(365\ ^1/_4\ \text{j.}) = 0°\ 59'\ 8''/\text{jour},$$

  puisque le Soleil fait un tour complet de l'écliptique en 365 $^1/_4$ jours.[6]
- Le temps pour le soleil d'aller de l'équinoxe du printemps au solstice d'été : 94 $^1/_2$ jours.
- Le temps pour le soleil d'aller du solstice d'été à l'équinoxe d'automne : 92 $^1/_2$ jours.

[6] La longueur de l'année solaire était bien connue depuis deux mille ans. Un peu avant l'époque de Ptolémée, en 45 av. notre ère, cette observation a mené à l'adoption du calendrier julien.

Pour arriver à calculer les segments TL et LD, il va d'abord déterminer la mesure des angles délimités, d'une part, par les droites perpendiculaires passant par la Terre T et, respectivement, par les équinoxes et les solstices, et, d'autre part, les droites parallèles à celles-ci passant par le centre D de l'orbite. Notons a et b la mesure de ces angles. Les données du problème font que, connaissant que la vitesse angulaire v égale 0° 59' 8" /jour,

l'arc du cercle C_2 parcouru du printemps à l'été mesure $90° + a + b = 94^1/_2\text{j} \times v$,

et l'arc du cercle C_2 parcouru de l'été à l'automne mesure $90 - b + a = 92^1/_2\text{j} \times v$.

On a donc l'équivalent d'un système du premier degré de deux équations à deux inconnues a et b. En résolvant ce système, ce que l'on savait faire depuis au moins le deuxième millénaire avant notre ère, on trouve a = 2° 10' et b = 0° 59'.

La longueur de chacun des segments LD et LT est égale à la demi-corde du double des angles de mesure a et b, respectivement. Or, nous l'avons dit, puisque ce qui intéresse Ptolémée est le mouvement apparent du Soleil, il peut choisir un rayon à sa convenance pour l'orbite circulaire du Soleil. Ayant à sa disposition une table des cordes pour un cercle de rayon 60, il prend un tel cercle pour l'orbite du Soleil. Il obtient alors,

$m\overline{TL} = (^1/_2)\text{crd}(2a) = 2;16$ pour $a = 2°10'$,

$m\overline{LD} = (^1/_2)\text{crd}(2b) = 1;\ 2$ pour $b = 0°59'$,

$m\overline{TD} = 2;\ 29,\ 30$.

La mesure du segment TD s'obtient en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle TLD. Les longueurs obtenues sont écrites en numération sexagésimale, de sorte que 2; 29, 30 signifie 2 unités de la mesure du rayon, plus 29 soixantièmes de cette unité, plus 30 soixantièmes de soixantième de celle-ci (autrement dit 30 3600ièmes).

Toutefois, dans le modèle de Ptolémée, ce qui importe ce n'est pas tant les distances que les angles, car tout se ramène à la position apparente sur la sphère des étoiles. Il faut donc connaître non pas la longueur des côtés du triangle TLD, mais plutôt ses angles. Pour déterminer ces angles, Ptolémée emploie « à l'envers » sa table des cordes, c'est-à-dire en cherchant dans la valeur des cordes à quel angle une corde donnée correspond. Pour trouver l'angle en T, il inscrit le triangle rectangle TLD dans un cercle, ce qui peut toujours se faire puisque le triangle TLD est rectangle. (Voir la figure 4). Le segment LD est, dans ce cercle, la corde de l'angle LOD. Mais pour pouvoir utiliser « à l'envers » la table des cordes, il faut que le cercle ait un rayon de 60, ou un diamètre de 120. Or le cercle

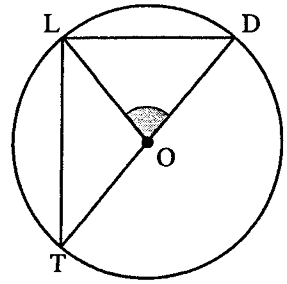


Figure 4

Le triangle LTD inscrit das un cercle

dans lequel est inscrit le triangle TLD a pour diamètre le segment TD de mesure 2; 29, 30. Mais le rapport entre le segment LD dans ce dernier cercle et le segment correspondant dans le cercle de diamètre 120 est le même que le rapport entre le diamètre de 2; 29, 30 du cercle et 120. Ainsi, le segment correspondant à $\overline{LD}$ dans le cercle de diamètre 120 a pour longueur 1;2 x 120 /2;29,30 = 49;46. Un coup d'œil dans la table des cordes permet alors de constater que l'angle correspondant mesure 49°. L'angle LTD interceptant le même arc que l'angle au centre LOD, il mesure la moitié de cet angle, soit 24° 30'.

Ptolémée connaît maintenant à la fois les dimensions du triangle TLD et ses angles. Son problème d'ajustement du modèle aux observations est donc résolu.

2.2 *Le sinus et au-delà, les autres grandeurs trigonométriques*

L'utilisation d'une variante de la corde, le sinus, fut introduite dans les calculs par les astronomes de l'Inde au début de notre ère. Ils avaient remarqué que, dans de nombreux problèmes astronomiques comme celui de notre exemple, il fallait calculer non pas la corde mais bien la demi-corde du double d'un angle. Ils donnèrent le nom de *jya-ardha* (corde-demi) à cette quantité et établirent des tables. Le *jya-ardha* sera par la suite utilisé par les Arabes après 700 et par les Européens à partir de la fin du Moyen Âge.

L'histoire du mot *sinus* mérite un aparté. L'astronome mathématicien Aryabhata (466-550) écrivait souvent simplement *Jya* ou *Jiva* au lieu de *jya-ardha* (corde-demi). Lorsque les Arabes traduisirent les textes indiens, ils utilisèrent à nouveau le terme indien courant *Jiva*, qui ne veut par ailleurs rien dire en arabe. Toutefois, en arabe, on n'écrit que les consonnes. Dès lors, le mot *Jiva* va s'écrire *Jb* et sera lu plutôt comme *Jaïb*, qui signifie poitrine ou col. Lors de la traduction en latin des livres arabes à partir du XIIIe siècle, les Européens emploieront le mot *sinus* qui veut entre autres dire poitrine, col, ou baie. On rencontre le mot Sinus sur les cartes géographiques de la Renaissance et du XVIIe siècle pour les baies (Sinus Mexicanus, par exemple, sur l'un des globes terrestres anciens du Musée Stewart de l'île Ste-Hélène). C'est ce même sens de *sinus* qui est attribué à la cavité située derrière le nez.

Il est important de noter que **la corde et son frère le sinus ne sont pas alors des rapports mais bien des longueurs de segments**. Ce sont le résultat de mesures. En fait, tout au long de la longue période pendant laquelle la trigonométrie n'est qu'une partie de l'astronomie, et même un peu après, les grandeurs trigonométriques correspondent à des mesures de segments. Ainsi, chez le grand mathématicien et astronome arabe al-Biruni (973-1005), la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante portent des noms en relation avec leur utilisation dans les calculs astronomiques, en particulier dans l'étude des ombres d'un bâton (penser aux cadrans solaires). Voir la figure 5, page suivante.

À partir de ces définitions en termes d'ombre d'un bâton, les astronomes arabes obtinrent l'équivalent des identités suivantes :

- $\cot^2(a) + 1 = \csc^2(a)$,
- $\tan^2(a) + 1 = \sec^2(a)$,
- $\tan(a) = \sin(a) / \cos(a)$.

Remarquons que la dernière identité n'est en aucun cas une définition mais bien une identité découlant de la définition de l'*ombre inverse* lorsqu'on place le triangle BGE dans un cercle de rayon BE centré à B.

La trigonométrie du triangle rectangle ne prendra vraiment son essor qu'avec Rheticus (1514-1574), le disciple de Copernic, qui commence à utiliser explicitement un triangle rectangle pour définir le sinus et le cosinus, mais encore là pour une hypoténuse de longueur donnée. Symptomatique de l'indépendance grandissante des calculs trigonométriques vis-à-vis de l'astronomie, pour la première fois le nom trigonométrie est donné à ceux-ci en 1595, dans le titre de l'ouvrage de Pitiscus (1561-1613) *Trigonometriae sive, de dimensione triangulis, Liber.* C'est qu'alors on commence à utiliser de plus en plus ce genre de calculs pour l'arpentage et, en général, pour la mesure des distances terrestres. Auparavant, ces calculs s'effectuaient presque uniquement à l'aide de la similitude des triangles. C'est dans ce contexte qu'on réécrit alors la trigonométrie en termes de rapports des côtés d'un triangle rectangle. Je ne connais pas bien l'histoire de cette réécriture, mais des indices semblent indiquer qu'elle ne se fit qu'au XVIIIe siècle. Cela ne serait guère surprenant, car il a d'abord fallu être en possession d'une notation numérique simple pour la mesure des rapports, or, cette notation, les fractions décimales, n'a été vraiment disponible et répandue qu'à partir de la fin du XVIIe siècle. Cela nous conduit à un second point, les unités de mesure utilisées.

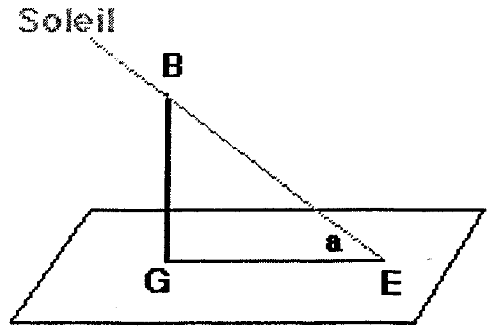
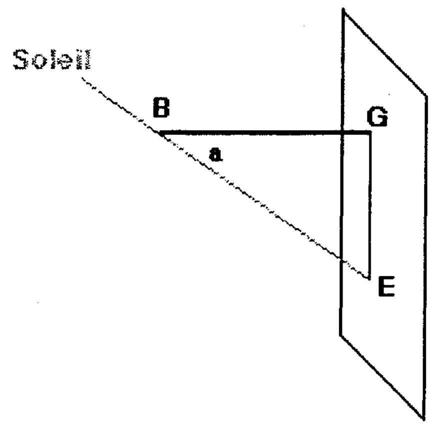
Nom	Interprétation
GE est appelé *l'ombre directe* du bâton vertical BG pour un angle a. C'est notre **cotangente** à un facteur $m\overline{BG}$ près. La table de *l'ombre directe* est calculée pour diverses valeurs de a. BE est appelée *l'hypoténuse de l'ombre directe* du bâton vertical BG pour un angle a. C'est notre **cosécante** à un facteur $m\overline{BG}$ près. La table de *l'hypoténuse de l'ombre directe* est calculée pour diverses valeurs de l'angle a.	
GE est appelé *l'ombre inverse* d'un bâton horizontal BG pour un angle a. C'est notre **tangente** à un facteur $m\overline{BG}$ près. La table de *l'ombre inverse* est calculée pour diverses valeurs de l'angle a. BE est appelée *l'hypoténuse de l'ombre inverse* d'un bâton horizontal BG pour un angle a. C'est notre **sécante** à un facteur $m\overline{BG}$ près. La table de *l'hypoténuse de l'ombre directe* est calculée pour diverses valeurs de l'angle a.	

Figure 5

Les grandeurs trigonométriques d'al-Biruni

3. LES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES DANS L'ÉCRITURE ET LA MANIPULATION DES FRACTIONS ONT INFLUENCÉ LES CHOIX DES UNITÉS DE MESURE DES ANGLES ET DES LONGUEURS À UTILISER.

(Nous développons dans cette section les constatations historiques 4 et 5)

Nous avons mentionné plus haut que l'astronome grec Hipparque a utilisé un cercle de rayon 3438 unités linéaires pour sa table des cordes. Le choix de la longueur du rayon du cercle est tributaire de plusieurs considérations dont la facilité à manipuler les fractions. Voyons quelques exemples pour illustrer cette dépendance.

3.1 Hipparque : un rayon de 3438 unités de mesure linéaire

Hipparque cherche à relier la mesure angulaire à la mesure linéaire du diamètre ou du rayon. Pour y parvenir, il détermine une unité de mesure linéaire qui et égale à la longueur d'un arc correspondant à un angle de 1'. Ainsi, un angle de mesure α intercepte un arc dont la longueur est aussi α. Connaissant la relation entre la circonférence et le rayon, le rayon doit mesurer 3438 de cette unité. En effet, avec une bonne approximation, un cercle dont le rayon mesure 3438 unités a une circonférence dont la longueur est 360×60 de ces unités, soit le nombre de minutes correspondant à 360°. Ainsi, Hipparque homogénéise, si l'on peut dire, l'unité de mesure d'angle et l'unité de mesure de longueur linéaire. Cela fait penser à notre radian. Toutefois, il y a une différence. Contrairement à ce que l'on fait en définissant le radian, Hipparque considère d'abord une unité de mesure d'angle, ici la minute, et détermine une nouvelle unité de mesure de longueur qui est telle que la mesure de la longueur d'un arc par cette unité soit le même nombre que la mesure de l'angle au centre correspondant à l'arc. Cette unité de mesure entre 3438 fois dans le rayon. Ici ce sont donc des considérations de cohérence mathématique qui guident Hipparque et non des considérations reliées au calcul. Il faut dire que sa table des cordes progressant par sauts de $7\,{}^1/_2°$, il n'a que 24 cordes à calculer.

3.2 Ptolémée : un rayon de 60 unités de mesure linéaire

Ptolémée pour sa part a construit une table pour des angles de ${}^1/_2°$ à 180° progressant par sauts de ${}^1/_2°$. Le nombre de calculs impliqués, 360, est donc beaucoup plus grand que pour Hipparque. Son choix de 60 comme mesure du rayon découle de ce grand nombre de calcul. Utilisant les fractions sexagésimales des Babyloniens, prendre 60 comme mesure du rayon simplifie grandement ses calculs. Cette augmentation de l'aisance au niveau des calculs se fait toutefois au détriment de l'homogénéité des mesures atteinte par Hipparque.

3.3 1100 - 1200 : un rayon de peu d'unités de mesure linéaire

Au tournant du premier millénaire de notre ère, les connaissances du calcul ont en grande partie été oubliées en Europe. À preuve, même l'usage de la table à calculer semble avoir été perdu. Le contact avec le monde arabe au temps des croisades réactive le commerce et, par lui, les besoins de calcul. Quelques tables de cordes sont produites. Ainsi, Fibonacci (1175-1220) en produit une basée sur un cercle de rayon 21. Une table « à l'envers » est aussi produite par Abraham bar Hiyya (Barcelone, mort en 1136), en partant d'un cercle de rayon 14 unités. Pourquoi ces nombres ? Simplement, dans le cas de Fibonacci, avec l'approximation de π par ${}^{22}/_7$, habituelle de l'époque, la mesure de la circonférence d'un cercle de rayon 21 est un nombre entier, soit 132. De même pour bar Hiyya, son cercle a une circonférence mesurant 88 unités. Dans les deux cas, il n'est pas question d'utiliser des fractions sexagésimales. Obtenir un entier, pas trop grand, pour la mesure de la circonférence semble avoir été à la source de leur choix. Ici aussi il n'y a pas de lien entre les degrés et la mesure du rayon.

3.4 Regiomontanus (1436-1476) et ses successeurs de la Renaissance : des rayons de 60×10^n ou de 10^n unités linéaires.

À la Renaissance, l'usage de la numération décimale positionnelle hindo-arabe, pour les entiers, se répand aussi bien chez les commerçants que chez les mathématiciens. Dès lors, l'usage et la maîtrise des algorithmes pour effectuer les opérations élémentaires sur les nombres se propage. Néanmoins, pour éviter les fractions dans les calculs des tables de sinus ou d'autres grandeurs trigonométriques, on prend un rayon de cercle le plus grand possible, d'où des rayons de 10 000, 100 000 ou 1 000 000 unités. Les fractions décimales ne seront popularisées d'abord qu'à la fin du XVIe siècle avec *La Disme* de Stevin, mais surtout après la publication, au milieu du XVIIe siècle, de tables de logarithmes des grandeurs trigonométriques par Napier, Briggs et d'autres. Ici encore, l'unité de mesure des angles n'a aucun lien avec l'unité de mesure de la longueur.

3.5 Euler (1707-1783) : Le cercle trigonométrique de rayon 1

Dans son *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Leonard Euler, fort de l'utilisation maintenant courante des fractions décimales, peut choisir de toujours travailler avec un cercle de rayon 1. Maintenant, exprimer une fraction, ou un rapport, ne pose plus de problèmes. En dehors de la communauté mathématique, l'on continue à cette époque d'utiliser les degrés pour la mesure des angles. Néanmoins, chez les mathématiciens qui exploitent avec de plus en plus de versatilité le nouveau calcul différentiel et intégral, la mesure des arcs de cercles prend une nouvelle importance. Roberval (1602-1675), dans son étude de la cycloïde, avait tracé le graphe du sinus. La cycloïde est le lieu d'un point d'un cercle que l'on fait rouler sur une droite horizontale. Aussi bien pour tracer la cycloïde que le sinus, il prenait comme variable indépendante la longueur de l'arc de cercle dont les points avaient touché la droite horizontale depuis le début du mouvement du cercle. Par la suite, les fonctions trigonométriques seront vues comme des fonctions de longueurs d'arcs. Euler parle de $\sin(2\pi)$ dans un cercle de rayon 1. Mais le transfert de la mesure d'arc, qui est une mesure de longueur, à la mesure d'angle ne se fait pas explicitement, et surtout pas dans le cadre d'un nouveau système de mesure des angles.

3.6 James T. Thomas en 1873 et Alexander J. Ellis en 1874 : l'invention du radian.

Ce n'est qu'à la suite de l'importance grandissante des fonctions trigonométriques en physique (Séries de Fourier, Transformées de Fourier, Transformées de Laplace) que le besoin se fera sentir de codifier la mesure des angles en termes de mesure du rayon unité du cercle trigonométrique. Le calcul différentiel et intégral et la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles nécessitent des calculs dont la complexité est contournée, dans leur travail théorique, par les mathématiciens mais qui s'alourdissent indûment dans le contexte de la physique où le numérique joue un rôle central. Les raisons justifiant l'introduction d'une nouvelle unité de mesure angulaire prennent leur sens, dans le cadre des mathématiques supérieures, dans la simplification des formules de dérivation et d'intégration des fonctions trigonométriques, et des expressions de la vitesse et de l'accélération des mouvements curvilignes.[7] C'est dans cette perspective qu'il faut comprendre le besoin de nommer et définir, dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, une nouvelle unité de mesure des angles, le radian. À un angle mesurant un radian correspond un arc dont la mesure de la longueur est le rayon du cercle. Avec les radians, la boucle est presque fermée. À nouveau, il y a homogénéisation de la mesure de l'angle et de la mesure de longueur. Toutefois, contrairement à ce qu'avait fait Hipparque plus de deux mille ans auparavant, l'homogénéisation ne va pas de la mesure d'angle vers la mesure linéaire mais de la mesure linéaire vers la mesure d'angle.

4. QUELQUES CONSIDÉRATIONS DIDACTIQUES EN GUISE DE CONCLUSION

1. Introduire le sinus et le cosinus d'abord par le triangle rectangle n'est pas nécessaire *a priori*. Une introduction par une trigonométrie du cercle permet de percevoir ces quantités immédiatement sous leur biais fonctionnel. De plus, les difficultés

---

[7] Jones, Philip S., Angular Measure, dans NCTM, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Washington : NCTM, 1969, pp. 364-368. Ce livre a été réimprimé en 1989.

reliées aux sinus de 90° et 0° ne se présentent pas si on ne sort pas de la trigonométrie du cercle.

2. On peut dire que la notion de « fonction » trigonométrique a précédé, d'une façon non formalisée, celle de rapport trigonométrique. On le constate dans le fait que des tables furent calculées et utilisées pour déterminer la valeur d'une grandeur trigonométrique correspondant à un angle donné ou, inversement, un angle dont on connaît la valeur de la grandeur trigonométrique correspondante. De plus, clairement, la « fonction » n'est pas identifiée à sa table des valeurs. La table des valeurs présente un atout important pour les calculs, mais le sens géométrique reste toujours prépondérant, comme l'indique le recours à de nouvelles tables toujours plus précises.

3. Il ne faut pas minimiser les difficultés inhérentes au passage de la trigonométrie du triangle à la trigonométrie du cercle. Nous demandons alors aux élèves d'étendre un concept pour le rendre applicable à un domaine plus large que son domaine de validité original... et cela en conservant la même terminologie qu'auparavant. Une telle extension amène nécessairement des conflits entre les habitudes et les intuitions développées dans le premier domaine et le comportement effectif dans le domaine étendu. Ne courons-nous pas après les problèmes ?

   Historiquement, on est passé d'un domaine plus large à un domaine plus restreint. Toutes ces questions relatives au sinus de 0° ou de 90° ne se sont pas posées puisque ce qui est vrai dans le cercle l'est nécessairement pour les triangles qu'on trace dans ce cercle.

4. La trigonométrie ayant été tributaire de l'astronomie pendant la plus grande partie de son histoire, il faut en conclure que la trigonométrie n'est pas nécessaire pour résoudre la très grande majorité des problèmes pratiques d'arpentage ou de mesure. Ces problèmes peuvent être résolus par l'emploi des similitudes. La trigonométrie n'a donc pas surgi de besoins économiques des sociétés, mais bien du désir, religieux et philosophique, de mieux saisir l'univers. Les contraintes esthétiques, comme la nécessité pour les astres célestes de se déplacer selon une combinaison de mouvements circulaires à vitesse angulaire uniforme, furent très importantes. Les contraintes d'adéquation entre un modèle astronomique et les observations jouèrent aussi un rôle central dans ce développement. Des incitatifs religieux, la détermination du moment des cinq prières quotidiennes et la détermination de l'orientation des mosquées, poussèrent les Arabes à affiner les méthodes grecques (en particulier la trigonométrie sphérique).

5. Enfin, on a travaillé pendant des millénaires les « fonctions » trigonométriques sans utiliser les radians. Alors, pourquoi s'obliger à utiliser les radians dès qu'on introduit les fonctions trigonométriques en secondaire V ? Nous l'avons signalé, les radians sont utiles, mais essentiellement dans le cadre du calcul différentiel et intégral. Ne vaudrait-il pas mieux, au secondaire, introduire d'abord des fonctions trigonométriques définies pour des angles mesurés en degrés, quitte, par la suite, à faire un changement d'unité de mesure d'angle pour passer des degrés aux radians ?

Avons-nous raison d'enseigner la trigonométrie dans l'ordre selon lequel nous le faisons au secondaire ? Dans cet enseignement, l'astronomie a complètement disparu. Est-ce l'histoire de la trigonométrie qui est à l'envers ? N'est-ce pas plutôt notre approche, trop tournée vers le terre-à-terre ?